

Herkansing Equationeel Programmeren 10 april 2014

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Veel succes!

Opgave 1. (3+4+4 punten)

- (a) Teken de volgende term als boom:

$$M = (\lambda uv. u u) ((\lambda x. x) z) ((\lambda y. y) z)$$

- (b) Reduceer M uit 1(a) in zo min mogelijk stappen naar β -normaalvorm; geef alle reductie-stappen expliciet.
- (c) Bereken de substitutie $(\lambda x. x y)[y := x]$.

Opgave 2. (2+4+5 punten)

- (a) Wat is een fixed-point combinator in de λ -calculus?
- (b) Laat zien dat

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

een fixed-point combinator is.

- (c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-innermost strategie niet normaliserend is, en licht dit toe.

Opgave 3. (5+5 punten)

(NB: $\rightarrow_\beta$ staat voor nul, een, of meer β -reductiestappen.)

- (a) We gebruiken de definitie van de Church numerals: $c_n = \lambda s. \lambda z. s^n(z)$. Geef een λ -term S voor successor en laat zien dat $S c_1 \rightarrow_\beta c_2$.
- (b) We representeren paren met de paringsoperator $\pi = \lambda l r z. z l r$. Geef een λ -term voor de eerste projectiefunctie π_1 en laat zien dat er geldt $\pi_1 (\pi P Q) \rightarrow_\beta P$.

Opgave 4. (4+4 punten)

- (a) Geef een voorbeeld van een term die niet typeerbaar is, maar die in één stap reduceert naar een typeerbare term. Geef de term, en de reductiestap, en een korte toelichting.
- (b) Geef een type-afleiding van de term $\lambda x. \lambda y. ((\lambda u. x) y)$.

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\[1em] \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B} \\[1em] \frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (F M) : B} \end{array}$$

Opgave 5. (4+4+4 punten)

- (a) Geef een definitie in HASKELL van de functie **append** die twee lijsten als input neemt en ze aan elkaar plakt. Bijvoorbeeld:

```
*Main> append [1,2,3] [4,5,6]
[1,2,3,4,5,6]
```

- (b) Gegeven is de functie **foldr** als volgt:

```
foldr f z []      = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

Geef, gebruikmakend van **foldr**, een definitie van de functie **myconcat**, die als input neemt een lijst van lijsten, en die als output geeft de concatenatie van al die lijsten. Bijvoorbeeld:

```
*Main> myconcat [[1,2,3] , [4,5,6]]
[1,2,3,4,5,6]
```

Geef de eerste vier stappen van de evaluatie van **myconcat** `[[1,2,3] , [4,5,6]]`, met informeel equationeel redeneren.

- (c) Gegeven is het data-type van binaire bomen met labels op de knopen:

```
data Boom a = Blad | Knoop (Boom a) a (Boom a)
```

Geef een definitie van de functie **flatten** die als input neemt een **Boom** en die als output levert de lijst van labels die je krijgt als je met inderde boom doorloopt (dwz van links naar rechts door de ‘platgeslagen’ boom). Bijvoorbeeld:

```
*Main> flatten (Knoop (Knoop Blad 1 Blad) 2 (Knoop Blad 3 Blad))
[1,2,3]
```

Opgave 6. ($4+4+4+4+4$ punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O	
Σ :	constanten	$\mathbf{a}: \rightarrow O$	
		$\mathbf{b}: \rightarrow O$	
	functie	$\mathbf{f}: O \rightarrow O$	
E :	vergelijkingen	[1] $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$	

- Geef een afleiding (met alle stappen expliciet) voor de vergelijking $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{b})))$.
- Geef een model met een drager bestaande uit drie elementen, dat zowel confusion als junk bevat. (Mag als tekening; geef de confusion en junk aan.)
- Geef een model met een drager bestaande uit drie elementen, dat confusion bevat maar geen junk. (Mag als tekening; geef de confusion aan.)
- Voeg één of meer vergelijkingen over de signatuur (S, Σ) toe aan de specificatie, zó dat het door jou in (c) gegeven model een initieel model wordt.
- Geef een initieel model voor de (oorspronkelijke) algebraïsche specificatie $((S, \Sigma), E)$. (Mag als tekening.)

Opgave 7. ($4+4+5+5$ punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O	
Σ :	constanten	$\mathbf{a}: \rightarrow O$	
		$\mathbf{b}: \rightarrow O$	
	functie	$\mathbf{f}: O \rightarrow O$	

Nu worden twee Σ -algebra's $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$ gedefinieerd als volgt:

$$\mathfrak{M}: \quad O_{\mathfrak{M}} = \{-1, 0, 1\} \quad \mathbf{a}_{\mathfrak{M}} = 0 \quad \mathbf{b}_{\mathfrak{M}} = -1 \quad \mathbf{f}_{\mathfrak{M}}(x) = |x|$$

$$\mathfrak{N}: \quad O_{\mathfrak{N}} = \{-3, -2, 0, 2, 3\} \quad \mathbf{a}_{\mathfrak{N}} = -2 \quad \mathbf{b}_{\mathfrak{N}} = -3 \quad \mathbf{f}_{\mathfrak{N}}(x) = |x|$$

- Teken $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$.
- Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{M}$ maar niet in $\mathfrak{N}$.
- Geef een initieel correcte specificatie voor $\mathfrak{M}$.
- Geef indien mogelijk een homomorfisme van $\mathfrak{N}$ naar $\mathfrak{M}$; licht je antwoord toe.