

Tentamen Equationeel Programmeren 31 januari 2014

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Veel succes!

Opgave 1. (3+4+3 punten)

- (a) Teken de term

$$M = (\lambda uv. u u) ((\lambda x. x) z) ((\lambda y. y) z)$$

als boom.

- (b) Geef een reductierij van M uit 1(a) naar β -normaalkvorm met zo min mogelijk stappen.
- (c) Reduceer de term $(\lambda x. x x) (\lambda s. \lambda z. s z)$ stap voor stap naar β -normaalkvorm.

Opgave 2. (4+4+4 punten)

- (a) Laat zien dat

$$T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$$

een fixed-point combinator is.

- (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-innermost (call-by-value) strategie niet normalizerend is. Licht je antwoord kort toe.
- (c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-outermost (call-by-need) strategie niet altijd een kortste reductie naar normaalkvorm oplevert. Licht je antwoord kort toe.

Opgave 3. (4+4 punten)

- (a) We representeren lijsten met $\text{nil} = \lambda z. \text{true}$ en $\text{cons} = \lambda ht. \lambda z. z h t$.

Geef een λ -term voor `empty` (de functie die een lijst als input neemt en `true` oplevert precies dan als de lijst leeg is).

Laat zien dat deze term het gewenste gedrag vertoont op input `nil` en op input `cons H T` (met H en T willekeurige λ -termen).

- (b) We representeren de booleans met $\text{true} = \lambda xy. x$ en $\text{false} = \lambda xy. y$.

Geef een λ -term voor `xor` (exclusive or, de functie die `true` oplevert als precies één van de twee argumenten `true` is, en `false` anders).

Laat voor één geval, namelijk `xor true false`, zien dat je term `xor` het juiste gedrag vertoont.

Opgave 4. (~~4+4~~ punten)

- (a) Geef een voorbeeld van een term die niet typeerbaar is, maar die in één stap β -reduceert naar een term die wel typeerbaar is. Geef de term, de reductiestap, en een korte toelichting.
- (b) Geef een type-afleiding voor de term $\lambda x.((\lambda u.x)x)$.

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\ \hline \Gamma, x : A \vdash M : B \\ \hline \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\ \hline \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\ \hline \Gamma \vdash (F M) : B \end{array}$$

Opgave 5. (~~3+3+4+4~~ punten)

- (a) Geef een definitie in HASKELL van de functie `vanafdrie` die de oneindige lijst van integers vanaf 3 genereert.
- (b) Geef een definitie in HASKELL van de functie `drievoudenvanafdrie` die de oneindige lijst van drievouden vanaf 3 genereert.
- (c) Geef een definitie in HASKELL van de functie `churchnumeral` die als input een integer n met $n \geq 0$ neemt, en dan het Church numeral c_n maakt.
- (d) Gegeven is de functie `foldr` als volgt:

```
foldr f z []      = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

Geef, gebruikmakend van `foldr`, een definitie in HASKELL van de functie `som` die als input een eindige rij van integers neemt, en als output teruggeeft de som van al die integers (en 0 als de input-lijst leeg is).

(Je mag hierbij een duidelijk omschreven hulpfunctie gebruiken zonder die te definiëren.)

Opgave 6. (~~3+4+4+3+3+4~~ punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O	
Σ :	constanten	a :	$\rightarrow O$
		b :	$\rightarrow O$
	functie	f :	$O \rightarrow O$
E :	vergelijkingen	[1]	$f(f(f(x))) = f(x)$
		[2]	$f(f(a)) = f(b)$

- (a) Geef een informele afleiding van de vergelijking $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{b})) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$.
(Gebruik de vergelijkingen uit E om gelijken door gelijken te vervangen; een genummerde afleiding is niet nodig.)
- (b) Geef een initieel model voor deze specificatie. (Mag als tekening.)
- (c) Beschrijf de drager van het termmodel van $((S, \Sigma), E)$.
- (d) Geef een model met junk, maar zonder confusion. (Mag als tekening.)
- (e) Geef een model, ongelijk het triviale model, met confusion, maar zonder junk. (Mag als tekening; geef de confusion duidelijk aan.)
- (f) Nu is gegeven de Σ -algebra $\mathcal{A}$ met $A = \{p, q, r, s\}$, en de volgende interpretatie van de functiesymbolen: $a_{\mathcal{A}} = p$, $b_{\mathcal{A}} = q$, en $f_{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ is gedefinieerd door $p \mapsto r, q \mapsto r, r \mapsto s, s \mapsto r$.
Teken $\mathcal{A}$, en geef een initieel correcte specificatie voor $\mathcal{A}$.
(NB de vergelijkingen E hierboven spelen in dit onderdeel (f) geen rol.)

Opgave 7. *(3+3+3+4+4 punten)*

Gegeven is een signatuur Σ met één constante $\mathbf{c}$, en één 1-plaatsig functiesymbool $\mathbf{f}$. Verder zijn gegeven de volgende Σ -algebras $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- De drager van $\mathfrak{A}$ is de verzameling met drie elementen $A = \{e, t, d\}$. Verder worden de constante en het functiesymbool geïnterpreteerd door $\mathbf{c}_{\mathfrak{A}} = e$ en $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(e) = e$, $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(t) = d$, $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(d) = t$.
 - De drager van $\mathfrak{B}$ is de verzameling met drie elementen $B = \{0, 1, 2\}$. Voor de interpretatie hebben we nu $\mathbf{c}_{\mathfrak{B}} = 0$ en $\mathbf{f}_{\mathfrak{B}}(0) = 1$, $\mathbf{f}_{\mathfrak{B}}(1) = 2$, $\mathbf{f}_{\mathfrak{B}}(2) = 0$.
- (a) Teken de modellen $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Gebruik daarbij pijltjes voor de interpretatie van $\mathbf{f}$ en geef duidelijk aan hoe de constante $\mathbf{c}$ wordt geïnterpreteerd.
 - (b) Geef indien mogelijk een vergelijking die waar is in $\mathfrak{A}$, maar niet in $\mathfrak{B}$.
 - (c) Geef indien mogelijk een vergelijking die waar is in $\mathfrak{B}$, maar niet in $\mathfrak{A}$.
 - (d) Geef indien mogelijk een initieel correcte specificatie E van $\mathfrak{B}$. Geef anders een reden waarom het niet mogelijk is.
 - (e) Geef indien mogelijk een initieel correcte specificatie E' van $\mathfrak{A}$. Geef anders een reden waarom het niet mogelijk is.