

Tentamen Equationeel Programmeren 23 december 2010

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Veel succes!

Opgave 1. (3+4+3 punten)

- (a) Teken de term

$$M = (\lambda uv. u u) ((\lambda x. x) z) ((\lambda y. y) z)$$

als boom.

- (b) Geef een reductierij van M uit 1(a) naar β -normaalvorm met zo min mogelijk stappen.
- (c) Geef een voorbeeld van een substitutie waarbij α -conversie nodig is.

Opgave 2. (5+5 punten)

- (a) Als een term typeerbaar is, dan is hij terminerend (dat wil zeggen: niet het beginpunt van een oneindige reductierij). De omgekeerde implicatie geldt niet.

Geef een voorbeeld van een terminerende term die niet typeerbaar is.

(Je hoeft niet uit te leggen waarom je term niet typeerbaar is.)

- (b) Geef een type-afleiding voor de term $\lambda x. ((\lambda u. x) x)$.

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\ \hline \Gamma, x : A \vdash M : B \\ \hline \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\ \hline \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\ \hline \Gamma \vdash (F M) : B \end{array}$$

Opgave 3. (4+5 punten)

- (a) Laat zien dat

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

een fixed point combinator is.

- (b) Reduceer $Y (\lambda y. z)$ naar β -normaalvorm.

Welke reductiestrategie gebruik je?

Opgave 4. (5+5 punten)

- (a) We representeren de booleans als $\text{true} = \lambda xy.x$ en $\text{false} = \lambda xy.y$.
Geef een λ -term voor not , en laat zien dat deze term het gewenste gedrag vertoont op input true .
- (b) We representeren paren met de paringsoperator $\pi = \lambda lrz.zlr$.
Geef een λ -term voor de eerste projectiefunctie π_1 en laat zien dat er geldt $\pi_1(\pi PQ) \rightarrow_\beta P$.
(NB: $\rightarrow_\beta$ staat voor nul, een, of meer β -reductiestappen.)

Opgave 5. (6+6 punten)

- (a) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
range : int -> int -> int list
```

die als input twee integers n en m neemt en als output levert de lijst van integers van n tot en met m . In het geval dat $n > m$ wordt de lege lijst als output gegeven. Een voorbeeld van het gebruik van `range`:

```
# range 4 10 ;;  
- : int list = [4; 5; 6; 7; 8; 9; 10]
```

- (b) We gebruiken het datatype voor binaire bomen met integer labels op de knopen:

```
type intbintree =  
  Leaf  
| Node of intbintree * int * intbintree ;;
```

Geef een definitie in OCAML van de functie

```
size_tree : intbintree -> int
```

die als input een binaire boom neemt en als output het aantal knopen van die boom geeft.

Opgave 6. (5+5+5+5 punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O		
Σ :	constanten	a :	$\rightarrow O$	
		b :	$\rightarrow O$	
		c :	$\rightarrow O$	
	functie	f :	$O \rightarrow O$	
E :	vergelijkingen	[1]	$f(b)$	$= c$
		[2]	$f(f(x))$	$= c$
		[3]	$f(f(f(x)))$	$= f(f(x))$

- (a) Geef een afleiding (met alle stappen expliciet) voor de vergelijking $f(f(f(a))) = f(f(b))$.
- (b) Geef een model met een drager bestaande uit drie elementen dat confusion bevat maar geen junk.
- (c) Voeg één of meer vergelijkingen over de signatuur (S, Σ) toe aan de specificatie, zó dat het door jou in (b) gegeven model een initieel model wordt.
- (d) Geef een initeel model voor de (oorspronkelijke) algebraïsche specificatie $((S, \Sigma), E)$.

er komt nog een opgave

Opgave 7. (2+5+4+4+4 punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O		
Σ :	constanten	a :	$\rightarrow O$	
		b :	$\rightarrow O$	
	functies	n :	$O \rightarrow O$	
		f :	$O \# O \rightarrow O$	
E :	vergelijkingen	[1]	$n(a)$	$= b$
		[2]	$n(b)$	$= a$
		[3]	$f(x, y)$	$= f(n(x), n(y))$

- (a) Geef een afleiding (met alle stappen expliciet) voor de vergelijking $n(n(a)) = a$.

Nu worden drie Σ -algebra's $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, en $\mathcal{M}$ gedefinieerd als volgt:

$\mathcal{K}$:	$O_{\mathcal{K}} = \{0, 1\}$	$a_{\mathcal{K}} = 0$ $b_{\mathcal{K}} = 1$	$n_{\mathcal{K}}(0) = 1$ $n_{\mathcal{K}}(1) = 0$	$f_{\mathcal{K}}(x, y) = x + y \mod 2$
$\mathcal{L}$:	$O_{\mathcal{L}} = \mathbb{Z}$	$a_{\mathcal{L}} = 3$ $b_{\mathcal{L}} = -3$	$n_{\mathcal{L}}(x) = -x$	$f_{\mathcal{L}}(x, y) = x + y $
$\mathcal{M}$:	$O_{\mathcal{M}} = \{\text{true}, \text{false}\}$	$a_{\mathcal{M}} = \text{true}$ $b_{\mathcal{M}} = \text{false}$	$n_{\mathcal{M}}(x) = \text{not}(x)$	$f_{\mathcal{M}}(x, y) = \text{xor}(x, y)$

- (b) Zijn deze algebra's modellen voor $((S, \Sigma), E)$?
(Alleen een eventueel negatief antwoord hoeft je te motiveren.)
- (c) Geef in de gevonden modellen zo mogelijk een voorbeeld van junk.
- (d) Geef in de gevonden modellen zo mogelijk een voorbeeld van confusion.
- (e) Geef een homomorfisme tussen $\mathcal{K}$ en $\mathcal{M}$.
(Je hoeft niet te bewijzen dat het een homomorfisme is.)

einde van het tentamen