

Tentamen Equationeel Programmeren 17 december 2009

Dit tentamen bestaat uit 4 pagina's; er zijn 7 opgaven. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. (3 + 3 + 4 + 4 + 4 punten)

- (a) Teken de term

$$M = \lambda x. ((\lambda u. u v) x) ((\lambda v. u v) x)$$

als boom.

- (b) Geef twee verschillende α -equivalente varianten van de term M .

- (c) Bereken de substitutie

$$M [u := xy]$$

- (d) Reduceer de term

$$T = (\lambda z. z ((\lambda x. xx) \lambda x. xx)) (\lambda y. \text{true})$$

naar β -normaalkvorm (schrijf elke stap op).

- (e) Welk soort strategie (innermost, outermost) moet je in de reductie in (d) *niet* gebruiken en waarom?

Opgave 2. (4 + 4 punten)

Van de twee termen $\lambda x. \lambda y. x x y$ en $\lambda x. \lambda y. x (x y)$ is de ene typeerbaar in simpel getypeerde λ -calculus, en de andere niet. Geef voor de typeerbare term een type-afleiding, en beredeneer voor de andere waarom dat niet mogelijk is.

De typeringsregels zijn:

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\Gamma, x : A \vdash x : A$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (F M) : B}$$

Opgave 3. (5 + 5 + 5 punten)

- (a) We representeren paren met de paringsoperator $\pi = \lambda l r z. z l r$.
Geef een λ -term voor de eerste projectiefunctie π_1 en geef stap voor stap de reductie van $\pi_1 (\pi P Q)$ naar P .
- (b) Geef, analoog aan de paring, nu een representatie in de λ -calculus van een tripeloperator T (om tripels zoals $[a, b, c]$ te representeren).
- (c) Geef bij de in onderdeel (b) gevonden tripeloperator T een term D die het derde element van een tripel selecteert, d.w.z., met de eigenschap dat $D (\mathsf{T} P Q R)$ reduceert naar R .
Laat ook zien dat je term D deze eigenschap heeft.

Opgave 4. (6 + 6 punten)

- (a) Definieer in OCaml een functie `add_at_end` die gegeven een data-element en een lijst dat element aan het eind van de lijst toevoegt.
Dus het gebruik van `add_at_end` moet bijvoorbeeld het volgende effect hebben:

```
# add_at_end 4 [1;6;2];;  
- : int list = [1; 6; 2; 4]  
# add_at_end 4 [];;  
- : int list = [4]
```

- (b) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
append : 'a list -> 'a list -> 'a list
```

die als input twee lijsten neemt en als output de concatenatie van de eerste en de tweede lijst levert. Een voorbeeld van het gebruik van `append`:

```
# append [1;2;3] [4;5;6] ;;  
- : int list = [1; 2; 3; 4; 5; 6]
```

Opgave 5. (3 + 3 + 3 punten)

Gegeven is het termherschrijfsysteem $\mathcal{R}$ met de volgende regels:

```
[R1]: C(x)  -->  0  
[R2]: C(x)  -->  C(C(x))
```

- (a) Is $\mathcal{R}$ SN?
(b) Is $\mathcal{R}$ WN?
(c) Is $\mathcal{R}$ UN?

(Motiveer uw antwoorden.)

Opgave 6. (5 + 4 + 10 punten)

Beschouw de algebraïsche specificatie Kerst met:

$S:$	soorten	O	
$\Sigma:$	constanten	$a:$	$\rightarrow O$
		$b:$	$\rightarrow O$
		$c:$	$\rightarrow O$
		$e:$	$\rightarrow O$
	functie	$p:$	$O \# O \rightarrow O$
$E:$	vergelijkingen		
		[1]	$p(x, y) = p(y, x)$
		[2]	$p(p(x, y), z) = p(x, p(y, z))$
		[3]	$p(x, x) = x$
		[4]	$p(x, e) = x$

Voor $p(x, y)$ mag ook de infix-notatie $x \cdot y$ worden gebruikt.

(a) Laat zien dat de volgende vergelijking afleidbaar is uit E :

$$p(c, p(a, p(c, e))) = p(a, c)$$

(Een volledig geformaliseerde afleiding is niet nodig. Een simpele berekening volstaat.)

Nu worden er drie Σ -algebra's $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, en $\mathcal{M}$ gedefinieerd als volgt:

$\mathcal{K}:$	$O_{\mathcal{K}} = \{0, 1\}$	$a_{\mathcal{K}} = 0$	$e_{\mathcal{K}} = 1$	$p_{\mathcal{K}}(n, m) = n \times m$
		$b_{\mathcal{K}} = 0$		
		$c_{\mathcal{K}} = 1$		
$\mathcal{L}:$	$O_{\mathcal{L}} = \mathbb{Z}$	$a_{\mathcal{L}} = 0$	$e_{\mathcal{L}} = 1$	$p_{\mathcal{L}}(n, m) = n \times m$
		$b_{\mathcal{L}} = 2$		
		$c_{\mathcal{L}} = 3$		
$\mathcal{M}:$	$O_{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$	$a_{\mathcal{M}} = \{1\}$	$e_{\mathcal{M}} = \emptyset$	$p_{\mathcal{M}}(v, w) = v \cup w$
		$b_{\mathcal{M}} = \{2\}$		
		$c_{\mathcal{M}} = \{3\}$		

(NB: $\times$ staat voor vermenigvuldiging, $\mathcal{P}$ voor machtsverzameling.)

- (b) Onderzoek voor deze algebra's of het modellen zijn van Kerst. Alleen een eventueel negatief antwoord hoeft je te motiveren.
- (c) Geef voor de gevonden modellen aan of er junk en of er confusion is. Welke zijn een initieel model voor Kerst?