

Dit tentamen telt voor 30% mee in het eindcijfer voor dit vak.
Dit tentamen duurt 2 uur. Het boek en een rekenmachine zijn niet toegestaan.

Opgave 1 Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{x}{1+x^4}$$

Hierin is $r > 0$ een parameter.

- a) [10%] Teken het faseplaatje voor $0 < r < 1$, voor $r = 1$ en voor $r > 1$. Geef ook de stabiliteit van de evenwichtspunten aan.
- b) [15%] Teken het bifurcatie-diagram, d.w.z. een plaatje van het (r, x) -vlak, waarin de evenwichtspunten en hun stabiliteit zijn aangegeven.
- c) [5%] Hoe heet de bifurcatie bij $r = 1$?

Opgave 2 [30%] Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = h + rx - x^7.$$

Hierin zijn h en r parameters.

Laat zien dat deze differentiaalvergelijking 1, 2 of 3 evenwichtoplossingen kan hebben. Bereken de deelverzamelingen van het (h, r) -vlak waarin dit het geval is. Maak ook een tekening van deze deelverzamelingen.

Opgave 3 We bekijken het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- a) [5%] Bereken het spoor en de determinant van bovenstaande 2×2 -matrix. Gebruik deze informatie (en niet andere informatie) om de stabiliteit van het evenwichtspunt $(x, y) = (0, 0)$ te bepalen.
- b) [10%] Bereken de eigenwaarde(n) van bovenstaande matrix en klassificeer het evenwicht. D.w.z. bepaal of het evenwichtspunt een stabiele knoop, onstabiele knoop, gedegenererde knoop, zadelpunt, centrum, stabiele spiraal of onstabiele spiraal is.
- c) [15%] Geef een uitdrukking voor de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.
- d) [10%] Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijkingen. D.w.z. teken in het (x, y) -vlak zoveel mogelijk banen van kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.