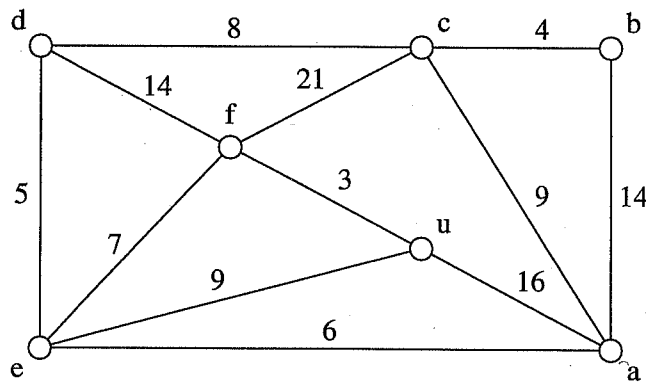


Discrete Wiskunde Tentamen 08-02-2010

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Afstandsgrafen en het Dijkstra Algoritme

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Wat is een *opspannende boom* in een samenhangende graaf G ?
 - (ii) Wat bedoelt men met de *afstand* $d(x, y)$ tussen twee punten x, y in een samenhangende gewogen graaf G ?
 - (iii) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een samenhangende gewogen graaf G ?
- (b) Beschrijf het *algoritme van Dijkstra* voor het korste-pad probleem in een samenhangende gewogen graaf G .
- (c) Bepaal met dit algoritme de korste-padenboom vanuit het punt u in de bijgevoegde graaf. Geef hierbij een volledige boekhouding, beschrijf het gevonden korste pad $u \rightarrow b$ en geef ook de lengte hiervan.

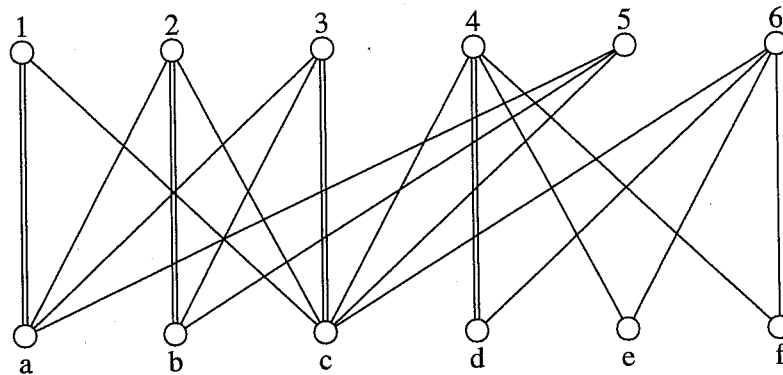


Figuur bij Opgave 1: het Dijkstra algoritme

(N.B.: Deze figuur is ook overgenomen op het aparte Multiple-choice blad.)

2. Toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G := (V_1, V_2; E)$

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat bedoelt men met een *toewijzing* van een verzameling $W \subseteq V_1$ in V_2 ?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *burentekort* in G ? N.B.: dit is een getal.
 - (iii) Wat is een *overdekking* van G ?
- (b) Formuleer de *Stelling van Hall* over toewijzingen in een tweedelingsgraaf G .
- (c) Wat verstaat men onder de *Hongaarse Methode*? Geef een beknopte beschrijving van deze algoritme.
- (d) Zoek met bovengenoemde methode een maximum toewijzing van $V_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in $V_2 := \{a, b, c, d, e, f\}$ in volgende graaf. Begin met de koppeling F , bestaande uit $1a, 2b, 3c, 4d$.



Figuur bij Opgave 2: toewijzing

(N.B.: Deze figuur is ook overgenomen op het aparte Multiple-choice blad.)

- (e) Geef het burentekort (0 of meer), geef de bijhorende "flessenhals" verzameling $W^* \subseteq V_1$, en construeer uit dit gegeven een minimum overdekking van G .

3. Combinatoriek

- (a) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)
- (b) In dit onderdeel wordt gekeken naar het aantal gehele oplossingen ≥ 0 van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$$

in n onbekenden ($n > 0, k \geq 0$). Laat zien dat de volgende formule juist is door eenzelfde bedrag op twee manieren te tellen.

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n+p-1}{p}.$$

Goede toelichting scoort.

- (c) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal w_n van woorden met n symbolen 0,1, waarin nooit twee 1en naast elkaar voorkomen. Geef de redenering; je hoeft de betrekking niet op te lossen.

4. Machtreksen en Recurrente betrekkingen

- (a) Algemene kennis.

- (i) In het klassieke binomium van Newton wordt $(1+X)^n$ uitgedrukt als een veelterm in X van graad n , waar n een natuurlijk getal is. Gegeven $n=5$, bereken de coëfficiënt van X^3 .
- (ii) Zij α een reëel getal en $k > 0$ geheel. Geef de formule voor " α kies k ", $\binom{\alpha}{k}$, voor $k > 0$.
- (iii) Geef het (veralgemeende) binomium van Newton voor $(1+X)^\alpha$, waarin de getallen uit onderdeel (a), deel (ii), optreden, en laat zien dat deze machtreks overeenstemt met het klassieke binomium wanneer α geheel positief is.

- (b) Bereken de binomiaalcoëfficiënt $\binom{-3}{4}$ via de formule uit onderdeel (a), deel (ii). Als je de formule

voor $\binom{-3}{k}$ kunt opstellen voor algemene $k > 0$ verdien je een bonuspunt.

- (c) Bij het oplossen van een recurrente betrekking via machtreksen komen we terecht op een vergelijking in de onbekende machtreks A :

$$A \cdot (1 + X)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X^n.$$

Leg uit hoe je dit verder afwerkt en geef de coefficient van X^6 in de oplossing A .

5. Coderingstheorie

- (a) Leg uit:
- (i) *Hamming afstand* tussen twee woorden.
 - (ii) *twee-fouten detecterende code* (onder maximum likelihood decoding).
 - (iii) *Een drie-fouten verbeterende code* (onder maximum likelihood decoding).
- (b) Hoe zie je aan de check matrix van een lineaire code dat je
- (i) Eén fout kan detecteren?
 - (ii) Twee fouten kan corrigeren?
- (c) We beschikken over de binaire (modulo twee) check matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal het syndroom en, indien mogelijk, de fout, bij de volgende ontvangen woorden:

$$w_1 := (1, 1, 0, 0, 1) \quad w_2 := (1, 0, 1, 0, 0).$$

- (d) Zoek een generator matrix G bij de check matrix uit deel (c) en decodeer (indien mogelijk) de ontvangen woorden uit onderdeel (c) na eventuele correctie.

Normering

1a: 3	2a: 3	3a: 5	4a: 5	5a: 3	6: 17
b: 4	b: 2	b: 5	b: 5	b: 4	
c: 6	c: 3	c: 5	c: 5	c: 4	
	d: 4			d: 4	
	e: 3				
13	15	15	15	15	17

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", folder "Hoofdtentamen DW") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

Naam:

Studierichting en jaar:

08-02-10

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. Een graaf $G=(V, E)$ is een *tweedelingsgraaf* als

- o G geen driehoeken bevat.
- o G geen cykels bevat.
- o G geen even cykels bevat.
- o G geen oneven cykels bevat.

6.2. Onder een *centraal punt* van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom met takken van gelijke lengte.
- o Een punt waarvan de gemiddelde taklengte zo lang mogelijk is.
- o Een punt waarvan de langste tak zo kort mogelijk is.
- o Het zwaartepunt van de boom bij een gegeven toekenning van gewichten aan de lijnen.

6.3. De stelling van *Ford & Fulkerson* stelt dat in een netwerk met bron en put

- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom niet de minimum capaciteit van een snede tussen bron en put overtreft.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede tussen bron en put.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.

6.4. Een k -*herhalingscombinatie* van n elementen is een keuze van k elementen uit een n -verzameling waarbij

- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.

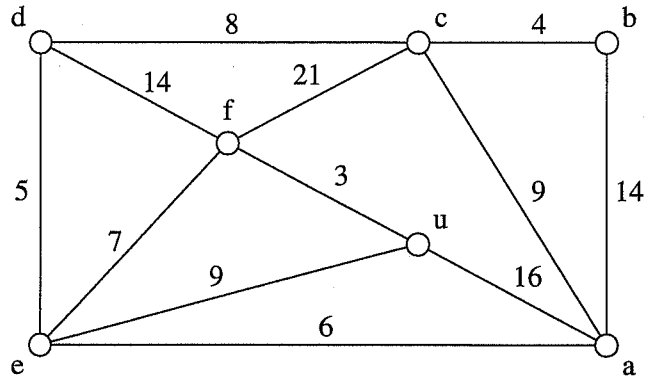
6.5. De *inverse* $1/B$ van een machtreeks B bestaat precies dan als

- o B niet de nulreeks is.
- o B een konstante term $\neq 0$ heeft.
- o als elke coëfficiënt van B van nul verschilt.
- o als B een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

6.6. Het *principe van inclusie-exclusie* in een universum U stelt dat het aantal elementen in U dat aan één van t gegeven condities voldoet, gelijk is aan:

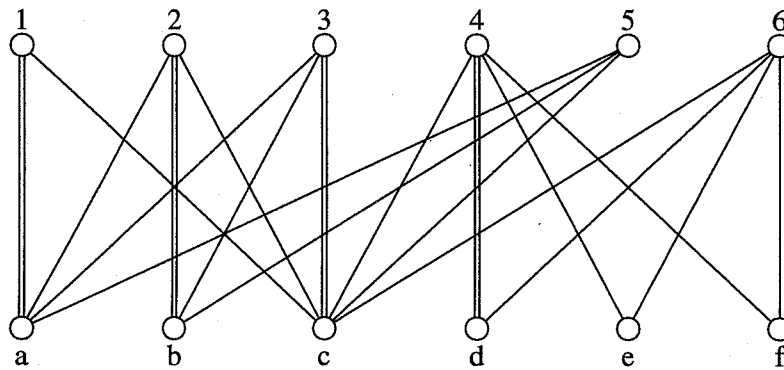
- o de alternerende som $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i de som is over alle i -tallen condities van het aantal elementen dat het i -tal condities voldoet.
- o de alternerende som $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat precies i condities overtreedt.
- o $\#U$ min de som $\sum_{i \leq t} S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat precies i condities voldoet.
- o het minimum over $0 \leq i \leq t$ van S_i , waar S_i de som is over alle i -tallen condities van het aantal elementen dat het i -tal condities voldoet.

De volgende figuur hoort bij opgave 1c (Dijkstra algoritme) en mag gebruikt worden in je oplossing.



Figuur bij Opgave 1: het Dijkstra algoritme

De volgende figuur hoort bij opgave 2d (toewijzingen in een tweedelingsgraaf) en mag gebruikt worden in je oplossing.



Figuur bij Opgave 2: toewijzing