

Discrete Wiskunde Tentamen 25-05-2009

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

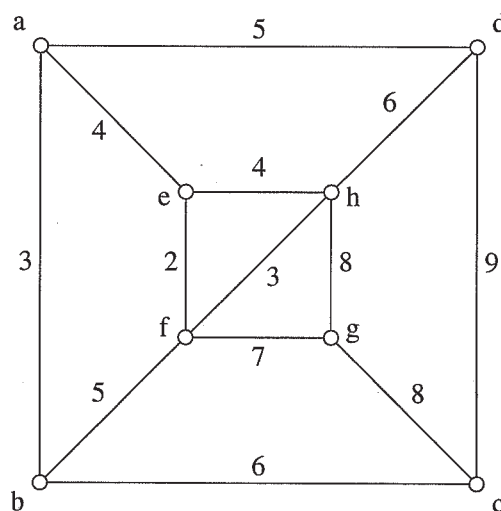
1. Dominostenen

Zij $k > 0$ geheel. Op een k -dominosteen staan twee al dan niet verschillende getallen $0, 1, \dots, k$. Een volledige set k -dominostenen bevat elke herhalingscombinatie van twee getallen precies één keer. Het is de bedoeling stenen in een kring te leggen, zó dat op de aangrenzende velden hetzelfde getal staat.

- (a) Algemene kennis.
 - (1) Geef een grafentheoretische beschrijving van een set k -dominostenen.
 - (2) Formuleer de *stelling van Euler* over het bestaan van bepaalde gesloten wandelingen in een graaf G .
- (b) Bij welke waarden van k kun je een kring van k -dominostenen leggen die alle stenen gebruikt, en voor welke kan dat niet? Leg uit.
- (c) Laat $k \geq 3$. Als er géén kring bestaat die alle k -stenen bevat, hoeveel stenen (uitgedrukt in k) blijven er dan minimaal over? Beredeneer je antwoord. **Aanwijzing:** denk aan de graaf met alle gebruikte stenen.

2. Het Prim Algoritme

- (a) Algemene kennis.
 - (i) Wat is een *opspannende boom* in een graaf?
 - (ii) Welke eenvoudige voorwaarde(n) zijn nodig en voldoende voor een graaf om een opspannende boom te bezitten?
- (b) Beschrijf het *algoritme van Prim* voor het vinden van een minimale opspannende boom in een gewogen graaf.
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. Wanneer meerdere keuzes mogelijk zijn, kies dan voor de mogelijkheid die alfabetisch eerst komt. (N.B.: De figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.)



Figuur bij Opgave 2: het Prim Algoritme

3. Tellen

- (a) k verschillende pakjes moeten in een kring rond de kerstboom worden gelegd.
- (1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?
 - (2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal het aantal mogelijkheden wanneer $k=9$.
- Een formule met toelichting volstaat in beide onderdelen a1) en a2).
- (b) Laat zien dat de volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

- (c) Zeventien identieke knikkers worden verdeeld over zes verschillende potjes, waarbij precies twee potjes leeg dienen te blijven en precies één potje een oneven aantal knikkers moet bevatten. Hoeveel mogelijke resultaten zijn er? Geef toelichting bij de uitkomst. **Aanwijzing:** tel aan de hand van een keuzeprocess dat in enkele fasen verloopt.

4. Recurrente betrekkingen

- (a) Los de volgende *recurrente betrekking* op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

- (b) Los de volgende recurrente betrekking op met behulp van *genererende functies*.

$$a_n - 3a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

Bepaal met de gevonden formule de getallen a_9 en a_{10} .

- (c) Een stratenmaker heeft twee soorten stenen tot zijn beschikking: dubbele en enkele lengte. Hij moet rijen leggen van lengte n , waarbij hij naar eigen smaak dubbele en enkele steenlengtes door elkaar mag gebruiken. Zij a_n het aantal mogelijkheden om een lengte n te leggen.
- (i) Geef de waarde van a_1 , a_2 , en a_3 .
 - (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n ($n \geq 3$).
- Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

5. Coderingstheorie

- (a) Algemene kennis:

- (i) Wat bedoelt men met de *Hamming afstand* tussen twee woorden?
- (ii) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding*?

- (b) Gegeven is een *generator matrix* G voor een lineaire, binaire code.

- (i) Ga na hoeveel *informatie-* en *check symbolen* er zijn, en
- (ii) *codeer* het meegegeven bericht $\vec{b}$.

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := (1, 0, 1).$$

- (c) (Vervolg deel (b)) Schrijf de bijhorende *check matrix* H uit.
- (d) (Vervolg delen (b) en (c)) Een gecodeerd bericht $\vec{w} := (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ wordt ontvangen. *Decodeer* dit bericht na een eventuele fout te hebben verbeterd, of geef aan waarom de fout niet kan worden verbeterd.

Normering

1a: 4	2a: 4	3a: 5	4a: 5	5a: 4	6: 20
b: 5	b: 3	b: 5	b: 5	b: 4	
c: 5	c: 5	c: 5	c: 4	c: 3	
				d: 4	
14	12	15	14	15	20

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", folder "Hoofdtentamen DW") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.