

Discrete Wiskunde Tentamen 13-02-08

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het Handelsreizigersprobleem

a) Algemene kennis.

1) Wat is een *Hamilton cykel* in een graaf?

1e goed antwoord: een Hamilton cykel in een graaf is een gesloten wandeling die door elk punt één keer gaat.

2e goed antwoord: een Hamilton cykel in een graaf is een opspannende cykel.

2) Leg uit wat men bedoelt met het *Handelsreizigersprobleem* in een gewogen graaf.

Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om een rondwandeling van minimaal gewicht te vinden in een gewogen graaf.

3) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een gewogen samenhangende graaf?

Het is een volledige graaf met dezelfde punten als de gegeven graaf. Het gewicht op een lijn ab is de afstand van a tot b in de oorspronkelijke graaf.

b) Er is een algoritme waarmee men het handelsreizigersprobleem in een volledige gewogen graaf of in een afstandsgraaf bij benadering kan oplossen. In de basisstap van deze algoritme wordt geprobeerd een Hamilton cykel te verbeteren. Leg uit hoe deze stap werkt.

Gegeven een Hamilton cykel $a_0, a_1, \dots, a_n = a_0$, onderzoek voor alle $i, j < n$ met $i < j-1$ of

$$a_i a_{i+1} + a_j a_{j+1} > a_i a_j + a_{i+1} a_{j+1}.$$

Zodra het antwoord "ja" is, stop je, en maak je een nieuwe cykel: van a_0 tot a_i (oude route), dan de lijn $a_i a_j$, dan van a_j terug naar a_{i+1} (oude route), dan de lijn $a_{i+1} a_{j+1}$, en tenslotte van a_{j+1} langs de oude route rond naar a_0 .

De lijnencollectie van de nieuwe route is dezelfde als die van de oude route, behalve dat de lijnen $a_i a_{i+1}$ en $a_j a_{j+1}$ niet meer voorkomen en in plaats daarvan de lijnen $a_i a_j$ en $a_{i+1} a_{j+1}$ voorkomen.

c)

	A	B	C	D	E	
A	0	8	3	9	4	Ga uit van de hiernaast gegeven gewichtenmatrix en van de cykel $A B C D E A$. Zoek met het algoritme uit b) naar een verbetering van de cykel, net zo lang tot de methode geen verbetering meer oplevert. Geef de gevonden cykel en zijn gewicht.
B	8	0	9	3	5	
C	3	9	0	9	4	
D	9	3	9	0	5	
E	4	5	4	5	0	

Oplossing:

1. begincykel ABCDEA met gewicht 35:

$$AB+CD = 8+9 > AC+BD = 3+3.$$

2. verbeterde cykel ACBDEA met gewicht 24:

$$CB+EA=9+4 > CE+BA = 4+8.$$

3. verbeterde cykel ACEDBA met gewicht 23:

wordt niet meer verbeterd met deze methode.

N.B. Er is nog een tweede antwoord mogelijk: cykel ABDECA heeft eveneens gewicht 23. Het gevonden gewicht (23) is ook echt optimaal.

2. Stromen in netwerken

a) Algemene kennis.

1) Wat is de *stroomsterkte* van een stroom in een netwerk?

Het is de uitgaande stroom in de bron.

Ook goed: de inkomende stroom in de put.

Meest snedige antwoord: de netto stroom over een snede tussen bron en put.

2) Wat is een *snede* tussen bron en put?

Het is een verdeling (partitie) van de puntencollectie in twee delen B en P , waar de bron tot B hoort en de put tot P .

3) Wat verstaat men onder de *capaciteit* van een snede?

De capaciteit van een snede $\{B, P\}$ is de som van de capaciteiten op pijlen van een punt van B naar een punt van P .

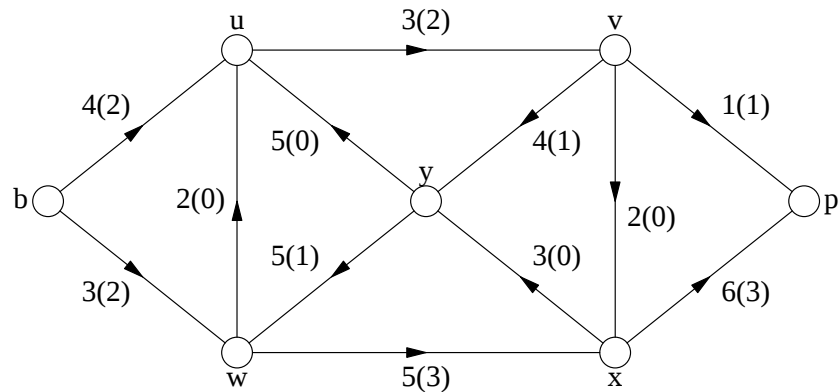
4) Wat verstaat men onder de hoeveelheid *stroom* over een snede?

De (netto) stroom over een snede $\{B, P\}$ is de som van de stromen op pijlen van een punt van B naar een punt van P , verminderd met de som van de stromen op pijlen van een punt van P naar een punt van B .

b) Formuleer de Stelling van Ford en Fulkerson over stromen in een netwerk.

De maximum stroomsterkte in een netwerk is gelijk aan de minimum capaciteit van een snede.

c) Construeer door middel van stroomverhoging een maximum geheeltallige stroom in het volgende netwerk. Geef de tussenstappen, en geef de gevonden maximum stroom.



Oplossing: de beginstroom heeft stroomsterkte 4.

pad $b \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow p$ geeft stroomverhoging 1.

pad $b \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x \rightarrow p$ geeft stroomverhoging 1. De maximum stroom heeft stroomsterkte 6.

- d) Geef een minimum snede in het netwerk uit onderdeel c).

Je vindt het "bron" deel B als de verzameling eindpunten van onverzadigde paden die uitgaan van de bron. De verzameling P bestaat dan uit de overige punten.

Oplossing: $B = \{b, u\}$ en $P = \{v, w, x, y, p\}$.

3. Tellen

- a) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Kies eerst welke bus leeg blijft, steek daarna 1 brief in elk van de overgebleven bussen. We kunnen de resterende 6 brieven dan willekeurig verdelen over die bussen. Dit geeft:

(5 keuzes voor lege bus) maal

(aantal verdelingen van 6 brieven over 4 bussen).

Aantal manieren:

$$5 \cdot \binom{4+6-1}{6} = 5 \cdot \binom{9}{6} = 5 \cdot 84 = 420.$$

- b) Zes studenten behalen een (geheelgetal) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

We hebben een verzameling Studenten van grootte zes en een verzameling Scores van grootte 10. De kans dat zes scores verschillend zijn, is het aantal injectieve functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$, gedeeld door het aantal functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$. Het aantal injectieve functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ is $(10)_6 := 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Het aantal functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ is 10^6 . De verhouding is

$$\frac{(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)}{1\,000\,000} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 3}{1\,250} = 0.1512.$$

De gezochte kans is het complement hiervan, dus 84.88 percent.

- c) In dit onderdeel wordt gekeken naar het aantal gehele oplossingen ≥ 0 van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$$

in n onbekenden ($n > 0, k \geq 0$). Laat zien dat de volgende formule juist is door het probleem op twee manieren op te lossen.

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n+p-1}{p}.$$

Eerste telmethode: voer een extra onbekende x_{n+1} in met

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = k.$$

Het aantal oplossingen van dit probleem is hetzelfde als dat van het oorspronkelijke probleem, omdat je x_{n+1} kunt berekenen uit de andere onbekenden. Het nieuwe probleem is het standaardmodel van het probleem "k eendere knikkers in $n+1$ verschillende bakjes" (k -herhalingscombinatie van $n+1$). Het aantal oplossingen daarvan is

$$\binom{(n+1)+k-1}{k} = \binom{n+k}{k}$$

(cf. het linkerlid van de gegeven formule).

Tweede telmethode: Vervang de gegeven ongelijkheid door

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \quad (p=0, 1, 2, \dots, k).$$

Het aantal niet-negatieve oplossingen van deze vergelijkingen apart is precies de sommatie in het rechterlid van de gegeven formule.

4. Recurrente betrekkingen en genererende functies

a) Algemene kennis.

1) Wat is de formule voor het product van twee machtreeksen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right)?$$

Het is de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k, \quad \text{met} \quad c_k := \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i}.$$

2) Wat is de machtreeks voor $1/(1-X)$?

Het is de reeks $1 + X + X^2 + \dots + X^k + \dots$

3) Wat is de machtreeks voor $1/(1+X^2)$?

Vorige reeks met substitutie van X door $-X^2$. Resultaat:

$$1 - X^2 + X^4 + \dots + (-1)^k X^{2k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^{2k}.$$

b) Los de volgende recurrente betrekking op onder de gegeven beginvoorwaarden. Gebruik daarbij de methode van genererende functies. Je antwoord mag van de vorm " B/C " zijn (met B , C machtreeksen of veeltermen). Bepaal aan de hand van je oplossing de waarde van a_6 .

$$a_k - 4a_{k-2} = 1 \quad (k \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 1).$$

Voor $k \geq 2$ vermenigvuldigen we beide leden met X^k en tellen op:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k X^k - 4 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} X^k = \sum_{k=2}^{\infty} X^k$$

Laat $A(X)$ de genererende functie zijn van de gezochte rij $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. We vinden dan (met gebruikmaken van de beginvoorwaarden $a_0 = 1, a_1 = 1$):

$$(A - 1 - X) - 4X^2 \cdot A = \frac{1}{(1-X)} - 1 - X.$$

Dit geeft voor de genererende functie:

$$A = \frac{1}{(1-X)(1-4X^2)}.$$

Om a_6 te berekenen, moeten we de coëfficiënt vinden bij X^6 . De directe methode is de eenvoudigste: neem

$$A(X) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} X^{2k}\right).$$

Hier zijn alle manieren om X^6 te krijgen als $X^k \cdot X^{2l}$.

linker exp k	rechter exp 2.l	bijdrage coëfficiënt
0	6	$1 \cdot 2^6 = 64$
2	4	$1 \cdot 2^4 = 16$
4	2	$1 \cdot 2^2 = 4$
6	0	$1 \cdot 2^0 = 1$
Totaal:		$a_6 = 85$

- c) Wat is de coëfficiënt van X^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

Je kan de reeks tussen de haken schrijven als $X/(1-X)$. De derde macht is $X^3/(1-X)^{-3}$. De formule hiervoor is

$$X^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} X^k.$$

De coëfficiënt van de tiende macht hoort bij de zevende graads term van de sommatie:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

Voor een "handmatige" berekening moet je tellen op hoeveel manieren je een term $X^i \cdot X^j \cdot X^k$ kunt maken met $i, j, k \geq 1$ en $i+j+k=10$. Daarbij komt X^i uit de machtreeks in de eerste factor van de derde macht, X_j uit de tweede factor, en X^k uit de derde. Dit komt neer op het "eendere knikkers in drie bakjes" probleem, waarbij in elk bakje alvast 1 knikker moet. De resterende zeven knikkers kun je vrij uitstrooien, en dat kan inderdaad op "3+7-1 kies 7" manieren.

5. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis.

- 1) Een gegeven binaire code C heeft een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte W ?

Het aantal woorden is 2 tot de 7de, dat is: 128 stuks.

- 2) Stel: de code C uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?

De informatiedichtheid is de logaritmische verhouding van het aantal codewoorden tot het totale aantal woorden. De basis voor de logaritme is het aantal symbolen van het gebruikte alfabet. Hier geeft dat: grondtal = 2 (binaire code) en

$$\text{informatiedichtheid} = \frac{\log_2(2^4)}{\log_2(2^7)} = \frac{4}{7}.$$

3) Wat is een *generator matrix* G voor een lineaire code C over een lichaam $\mathbb{F}$?

Twee goede antwoorden:

- (i) Het is een matrix waarvan de rijen (gezien als vectoren) een basis vormen voor de code C .
- (ii) Het is een matrix (zeg: k rijen bij n kolommen) die de code genereert in de volgende zin. Een informatievevector $\vec{v}$ is een rijtje van k elementen uit het lichaam $\mathbb{F}$. Deze kan rechts worden vermenigvuldigd met G ($\vec{v} \cdot G$). Het resultaat is een vector met n elementen uit het lichaam $\mathbb{F}$. De gegenereerde code C bestaat uit alle vectoren van deze vorm, en de berekening $\vec{v} \mapsto \vec{v} \cdot G$ is de codering.

4) Wat bedoelt men met een *systematische generator matrix* G bij een lineaire code C ?

Het is een generatormatrix met achteraan een eenheidsblok (dat blok mag ook vooraan staan).

Gegeven is de volgende generator matrix voor een *ternaire* code C .

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N.B: bij "ternair rekenen" zijn twee getallen hetzelfde als ze een drievoud verschillen; bijvoorbeeld $-2 \equiv 1$.

b) Zoek een bijpassende check matrix H .

Methode: G is 4 bij 7. Je moet voor de check matrix H een 3 bij 7 matrix hebben, met vooraan een eenheidsblok (3 bij 3), en achteraan een gespiegelde versie, met extra mintekens, van het resterende blok uit G . Aldus:

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 0101 en 2211.

$$(0101) \cdot G = (1020101) \text{ (2e rij plus 4e rij).}$$

$$(2211) \cdot G = (0102211).$$

d) Decodeer (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 2201100 en 1022011. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

Vector $\vec{v} := (2201100)$ geeft als syndroom $H \cdot (2201100) = (202)$. Dit kun je zien als $2 \cdot \text{kolom1} + 2 \cdot \text{kolom3}$ (fout 2 in posities 1 en 3), maar ook als $\text{kolom5} - \text{kolom6}$ (fout 1 in positie 5 en fout 2 in positie 6). De preciese fout is dus niet te localizeren.

Vector $\vec{v} := (1022011)$ geeft als syndroom $H \cdot (1022011) = (002)$. Dit is -1 keer kolom 3, wat betekent: fout -1 op de derde positie. Correctie: codevector $\vec{c} = \vec{v} \text{ min foutvector} = (1002011)$. Decodering: informatievevector = 2011 (laatste vier trits).

NORMERING:

1a:	3	2a:	4	3a:	5	4a:	3	5a:	4	MC:	15
1b:	4	2b:	3	3b:	5	4b:	6	5b:	3		
1c:	7	2c:	6	3c:	5	4c:	6	5c:	4		
		2d:	3					5d:	4		
	14		16		15		15		15		15

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per fout antwoord.
Het totaal te behalen punten is 90.

$$\text{TOTAAL} = 90, \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$

Naam:

Studierichting en jaar:

13-02-08

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. Een graaf $G = (V, E)$ is een *tweedelingsgraaf* als

- o G geen cyclen bevat.
- o G geen drie-cyclen (driehoeken) bevat.
- o G geen oneven cyclen bevat. ➡ DEZE
- o G geen even cyclen bevat.

Kommentaar:

Optie 1 gaat meer in de richting van bomen (samenhang ontbreekt). Optie 2 is te zwak. Optie 4 noemt de verkeerde soort van cyclen; een vierkant is een tweedelingsgraaf met een even cykel.

6.2. Onder een *centrum* van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom dat even ver van alle eindpunten ligt.
- o Een punt van de boom met takken van maximum lengte.
- o Een punt van de boom waarvan de langste tak de kortste is onder alle punten. ➡ DEZE
- o Het zwaartepunt van de boom bij een toekenning van gewicht 1 aan de lijnen.

Kommentaar:

Opties 1 en 4 kunnen gevoelsmatig doorgaan voor de goede definitie, maar zijn het niet: definitie 4 is vaag (het fysieke "zwaartepunt" zou wel eens midden in een lijn kunnen liggen) en ook definitie 1 levert in de meeste bomen geen enkele vertex op. Optie 2 is radicaal fout: hiermee ga je eerder bij eindpunten terecht komen.

6.3. Een *opspannende boom* in een samenhangende graaf $G = (V, E)$ is

- o een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf van G . ➡ DEZE
- o een deelgraaf van G die een boom is en waarvan de vertices een overdekking van G vormen.
- o een boom met dezelfde vertices als G .
- o een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsamenvast maakt.

Kommentaar:

Optie 2: "opspannend" betekent echt wel "alle vertices". Optie 3 geeft maar een deel van de conditie: de boom moet ook een deelgraaf zijn. Optie 4 is volstrekt naast de kwestie.

6.4. Een *k-herhalingscombinatie van n elementen* is een keuze van k elementen uit een n -verzameling waarbij

- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen. ➡ DEZE

Kommentaar:

Optie 1 staat voor k -rangschikking van n elementen. Optie 2 staat voor k -combinatie van n elementen. Optie 3 staat voor

k -herhalingsrangschikking van n elementen.

6.5. Het *principe van inclusie-exclusie* in een "universum" U stelt dat het aantal elementen in U dat aan géén van t condities voldoet, gelijk is aan $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$. Daarbij staat S_i voor:

- o het aantal elementen dat aan precies i van deze t condities voldoet.
- o de som, genomen over alle i -tallen condities, van de aantallen elementen die aan deze i condities voldoen. ➡ DEZE
- o het aantal elementen welke precies i condities overtreden.
- o het aantal elementen welke aan ten hoogste i condities voldoen.

Kommentaar:

in de correcte formule is S_i een som van getallen $N(c_{k_1} \dots c_{k_i})$, waar $c_{k_1}, \dots, c_{k_i}$ een lijst van i verschillende condities voorstelt. Het getal $N(c_{k_1} \dots c_{k_i})$ staat voor het aantal elementen welke aan $c_{k_1}, \dots, c_{k_i}$ voldoen (ze mogen ook nog aan andere condities voldoen). Optie 1 is een klassieke fout; het gaat hier om een techniek voor correctie van dubbelstellingen. Opties 3 en 4 maken dezelfde fout. Bij 3 is bovendien "overtreden" fout en bij 4 "ten hoogste".

6.6. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men een decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord. ➡ DEZE
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

Kommentaar:

Optie 2 is "wishful thinking", optie 3 geeft enkel een speciale methode weer, en optie 4 is volstrekt onrealistisch.