

Discrete Wiskunde Tentamen 13-02-2008

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het Handelsreizigersprobleem

a) Algemene kennis.

- 1) Wat is een *Hamilton cykel* in een graaf?
- 2) Leg uit wat men bedoelt met het *Handelsreizigersprobleem* in een gewogen graaf.
- 3) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een gewogen samenhangende graaf?

b) Er is een algoritme waarmee men het handelsreizigersprobleem in een volledige gewogen graaf of in een afstandsgraaf bij benadering kan oplossen. In de basisstap van deze algoritme wordt geprobeerd een Hamilton cykel te verbeteren. Leg uit hoe deze stap werkt.

- c)
- | | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 3 | 9 | 4 |
| B | 8 | 0 | 9 | 3 | 5 |
| C | 3 | 9 | 0 | 9 | 4 |
| D | 9 | 3 | 9 | 0 | 5 |
| E | 4 | 5 | 4 | 5 | 0 |
- Ga uit van de hiernaast gegeven gewichtenmatrix en van de cykel $A B C D E A$. Zoek met het algoritme uit b) naar een verbetering van de cykel, net zo lang tot de methode geen verbetering meer oplevert. Geef de gevonden cykel en zijn gewicht.

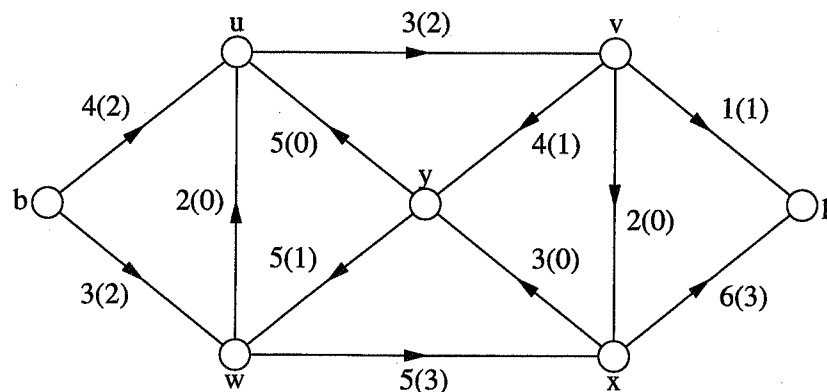
2. Stromen in netwerken

a) Algemene kennis.

- 1) Wat is de *stroomsterkte* van een stroom in een netwerk?
- 2) Wat is een *sneede* tussen bron en put?
- 3) Wat verstaat men onder de *capaciteit* van een sneede?
- 4) Wat verstaat men onder de hoeveelheid *stroom* over een sneede?

b) Formuleer de Stelling van Ford en Fulkerson over stromen in een netwerk.

c) Construeer door middel van stroomverhoging een maximum geheeltallige stroom in het volgende netwerk. Geef de tussenstappen, en geef de gevonden maximum stroom.



(Deze figuur is in viervoud overgenomen achter het in te leveren multiple-choice gedeelte).

d) Geef een minimum sneede in het netwerk uit onderdeel c).

3. Tellen

- a) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)
- b) Zes studenten behalen een (geheeltallige) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.
- c) In dit onderdeel wordt gekeken naar het aantal gehele oplossingen ≥ 0 van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$$

in n onbekenden ($n > 0, k \geq 0$). Laat zien dat de volgende formule juist is door het probleem op twee manieren op te lossen.

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n+p-1}{p}.$$

4. Recurrente betrekkingen en genererende functies

- a) Algemene kennis.
 - 1) Wat is de formule voor het product van twee machtreeksen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right)?$$

- 2) Wat is de machtreeks voor $1/(1-X)$?
 - 3) Wat is de machtreeks voor $1/(1+X^2)$?
- b) Los de volgende recurrente betrekking op onder de gegeven beginvoorwaarden. Gebruik daarbij de methode van genererende functies. Je antwoord mag van de vorm " B/C " zijn (met B, C machtreeksen of veeltermen). Bepaal aan de hand van je oplossing de waarde van a_6 .

$$a_k - 4a_{k-2} = 1 \quad (k \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 1).$$

- c) Wat is de coëfficiënt van X^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

5. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis.
 - 1) Een gegeven binaire code C heeft een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte W ?
 - 2) Stel: de code C uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?
 - 3) Wat is een *generator matrix* G voor een lineaire code C over een lichaam $\mathbb{F}$?
 - 4) Wat bedoelt men met een *systematische generator matrix* G bij een lineaire code C ?

Gegeven is de volgende generator matrix voor een *ternaire* code C .

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N.B: bij "ternair rekenen" zijn twee getallen hetzelfde als ze een drievoud verschillen; bijvoorbeeld $-2 \equiv 1$.

- b) Zoek een bijpassende check matrix H .
- c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 0101 en 2211.
- d) Decodeer (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 2201100 en 1022011. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

NORMERING:

1a:	3	2a:	4	3a:	5	4a:	3	5a:	4	MC:	15
1b:	4	2b:	3	3b:	5	4b:	6	5b:	3		
1c:	7	2c:	6	3c:	5	4c:	6	5c:	4		
		2d:	3					5d:	4		
	14		16		15		15		15		15

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per fout antwoord.

Het totaal te behalen punten is 90.

$$\text{TOTAAL} = 90, \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", laatste folder). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart multiple choice gedeelte

Naam:

Studierichting en jaar:

13-02-08

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. Een graaf $G=(V, E)$ is een *tweedelingsgraaf* als

- o G geen cykels bevat.
- o G geen drie-cykels (driehoeken) bevat.
- o G geen oneven cykels bevat.
- o G geen even cykels bevat.

6.2. Onder een *centrum* van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom dat even ver van alle eindpunten ligt.
- o Een punt van de boom met takken van maximum lengte.
- o Een punt van de boom waarvan de langste tak de kortste is onder alle punten.
- o Het zwaartepunt van de boom bij een toekenning van gewicht 1 aan de lijnen.

6.3. Een *opspannende boom* in een samenhangende graaf $G=(V, E)$ is

- o een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf van G .
- o een deelgraaf van G die een boom is en waarvan de vertices een overdekkig van G vormen.
- o een boom met dezelfde vertices als G .
- o een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsamenvast maakt.

6.4. Een k -*herhalingscombinatie* van n elementen is een keuze van k elementen uit een n -verzameling waarbij

- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.

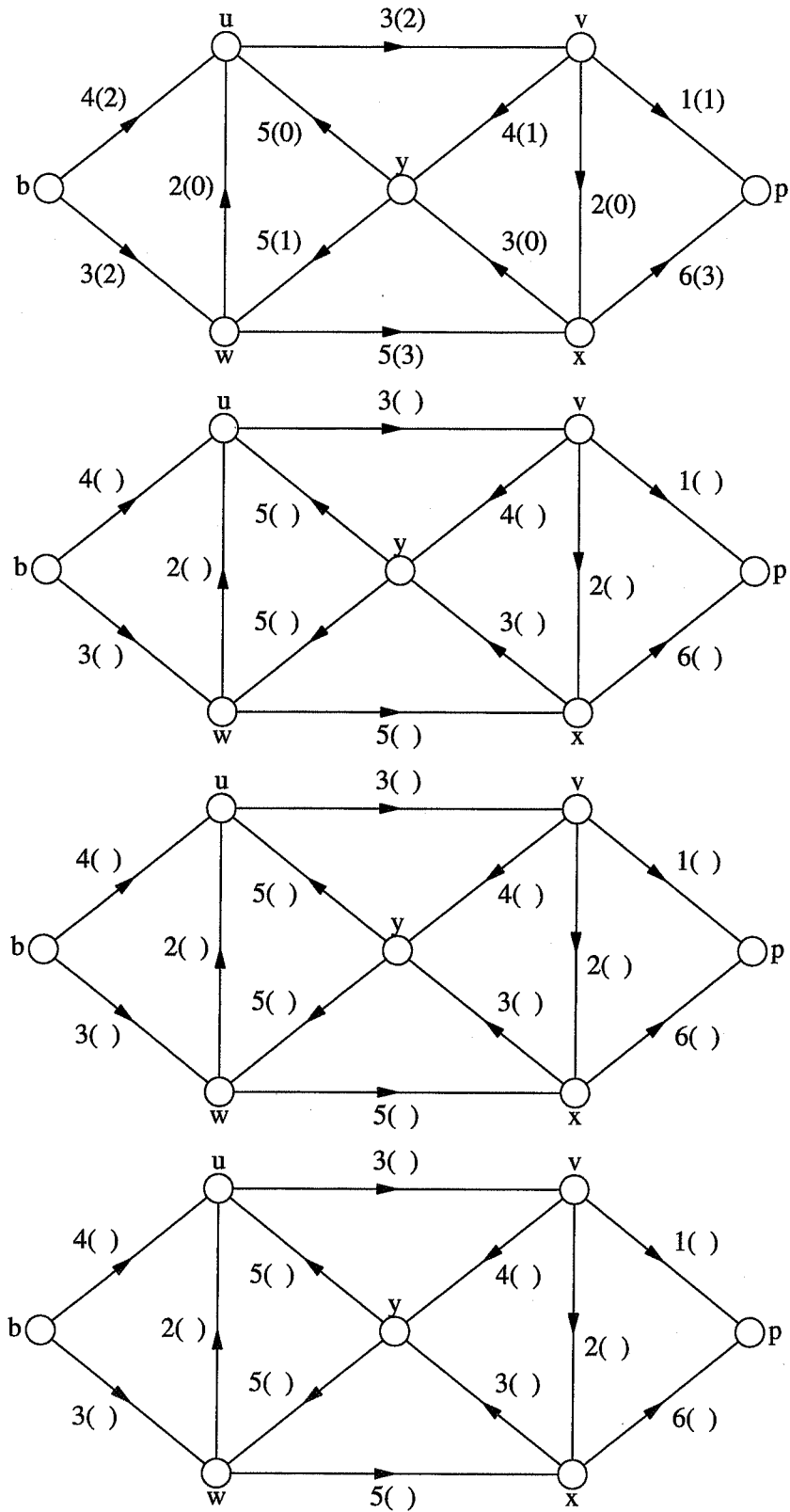
6.5. Het *principe van inclusie-exclusie* in een "universum" U stelt dat het aantal elementen in U dat aan één van t condities voldoet, gelijk is aan $\sum_{i=1}^t (-1)^{i+1} S_i$. Daarbij staat S_i voor:

- o het aantal elementen dat aan precies i van deze t condities voldoet.
- o de som, genomen over alle i -tallen condities, van de aantallen elementen die aan deze i condities voldoen.
- o het aantal elementen welke precies i condities overtreden.
- o het aantal elementen welke aan ten hoogste i condities voldoen.

6.6. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men een decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord.
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

Werkfiguren bij opgave 2



Figuur: netwerk met stroom bij opgave 2.