

## Discrete Wiskunde Tentamen 19-12-07

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

### 1. Afstandsgrafen en het Dijkstra Algoritme

(a) (Algemene kennis)

1) Wat is een *opspannende boom* in een samenhangende graaf  $G$ ?

Een opspannende deelgraaf van  $G$  die tevens een boom is. Opspannend wil zeggen: met dezelfde vertexcollectie  $V(G)$  als  $G$ .

2) Wat bedoelt men met de *afstand*  $d(x, y)$  tussen twee punten  $x, y$  in een samenhangende gewogen graaf  $G$ ?

$d(x, y)$  is het kleinst mogelijke totaalgewicht van een pad  $x \mapsto y$  in  $G$ . Met "totaalgewicht van een pad" wordt bedoeld de som van de gewichten van alle lijnen in het pad.

3) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een samenhangende gewogen graaf  $G$ ?

Het is de volledige graaf op de vertices van  $G$ , waarbij een lijn  $xy$  als gewicht krijgt:  $d(x, y)$  ( $x, y \in V(G)$ ).

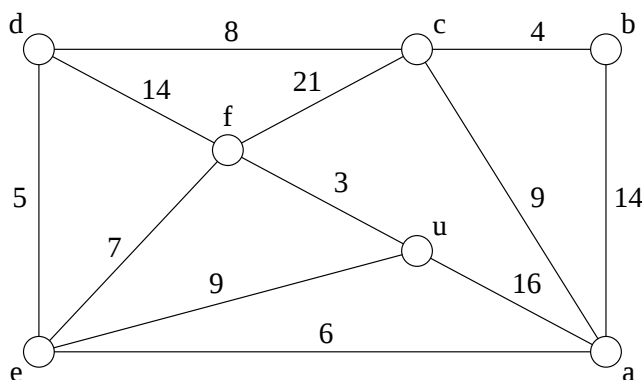
(b) Beschrijf het *algoritme van Dijkstra* voor het korste-pad probleem in een samenhangende gewogen graaf  $G$ .

We willen de afstanden uitrekenen van een vooraf gekozen punt  $u$  van  $G$  tot alle andere punten van  $G$ .

Boekhouding: voor iedere vertex  $v$  van  $G$  hebben we twee "registers"  $l(v)$  en  $L(v)$ , waar  $l(v)$  de "voorlopig berekende afstand" van  $v$  tot  $u$  is, en  $L(v)$  de buur van  $v$  bevat langs waar die afstand berekend werd. Tenslotte is  $H$  een kortste-paden boom in  $G$ , die de punten  $v$  bevat waar  $l(v)$  en  $L(v)$  hun definitieve waarde hebben bereikt.

Beginwaarden:  $l(u)=0$ ,  $l(v)=\infty$  voor alle  $v \neq u$ ,  $L(v)$  is onbepaald voor alle  $v$ . Verder is  $H$  aanvankelijk de 1-puntsboom  $\{u\}$ .

(c) Bepaal met dit algoritme de korste-padenboom vanuit het punt  $u$  in de bijgevoegde graaf. Geef hierbij een volledige boekhouding en beschrijf het gevonden korste pad  $u \rightarrow b$  en zijn lengte.



Figuur bij Opgave 1: het Dijkstra algoritme

|   | l        | L | H | l        | L | H | l        | L | H | l        | L | H | l        | L | H | l  | L | H |
|---|----------|---|---|----------|---|---|----------|---|---|----------|---|---|----------|---|---|----|---|---|
| u | 0        | - | * | 0        | - | * | 0        | - | * | 0        | - | * | 0        | - | * | 0  | - | * |
| a | $\infty$ | - | - | 16       | u | - | 16       | u | - | 15       | e | - | 15       | e | * | 15 | e | * |
| b | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | 29 | a | - |
| c | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | 24       | f | - | 24       | f | - | 22       | d | - | 22 | d | * |
| d | $\infty$ | - | - | $\infty$ | - | - | 17       | f | - | 14       | e | * | 14       | e | * | 14 | e | * |
| e | $\infty$ | - | - | 9        | u | - | 9        | u | * | 9        | u | * | 9        | u | * | 9  | u | * |
| f | $\infty$ | - | - | 3        | u | * | 3        | u | * | 3        | u | * | 3        | u | * | 3  | u | * |

Tabel: stappen in het Dijkstra algoritme

Het laatst toegevoegde punt van  $H$  is  $c$ . Merk op dat  $d$  geen buur is van het enig overgebleven punt  $b$ . In de volgende, laatste, ronde zien we dat  $l(c)+4=26 < l(b)=29$ . We veranderen  $L(b)$  in ' $c$ ',  $l(b)$  in 26, en het algoritme eindigt met een opspannende boom. Het kortste pad  $u \rightarrow b$  is volgens de tabel:

$$u \xrightarrow{-9} e \xrightarrow{-5} d \xrightarrow{-8} c \xrightarrow{-4} b.$$

De lengte is  $l(b)=26=9+5+8+4$

## 2. Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met een *overdekking* in een graaf?

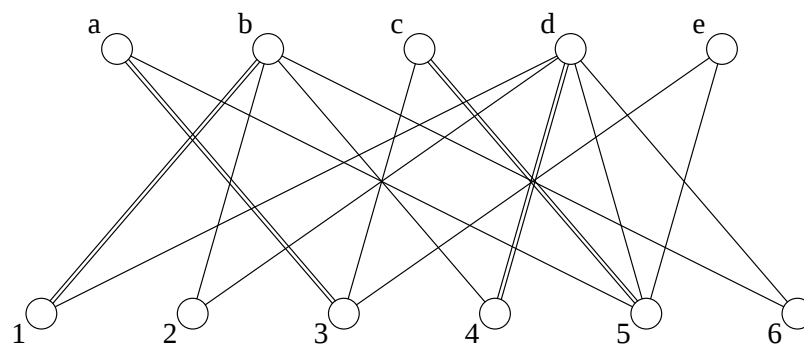
Een overdekking in een graaf is een deelcollectie punten zó dat iedere lijn incident is met een punt uit de collectie.

(ii) Wat zegt de *stelling van König en Egerváry* in verband met overdekkingen en toewijzingen?

In een tweedelingsgraaf is de minimumgrootte van een overdekking gelijk aan de maximum grootte van een toewijzing.

(b) Gegeven is een tweedelingsgraaf  $G$  en een toewijzing  $F$  in  $G$  volgens de figuur.

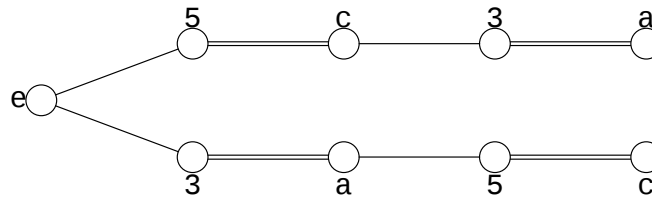
$$F := \{a3, b1, c5, d4\}.$$



Figuur bij Opgave 2: Overdekkingen en Optimale toewijzingen

Controleer methodisch dat dit een maximum toewijzing is in  $G$ . Geef voldoende details.

We gebruiken de Hongaarse methode. Het enige onverzadigde punt in  $\{a,b,c,d,e\}$  is  $e$ . De wisselboom in  $e$  is:



Alle eindpunten van de boom zijn  $F$ -verzadigd. De koppeling kan niet verder worden vergroot.

- (c) Construeer met de resultaten uit deel (b) een minimale overdekking in  $G$ . Geef voldoende details van je constructie(s).

Het gebruikelijke recept is: bepaal een "flessenhals"  $W^* \subseteq \{a, b, c, d, e\}$  en neem als overdekking  $U := \{a, b, c, d, e\} \setminus W^* \cup B(W^*)$ . Hier:  $W^* := \{a, c, e\}$  en  $B(W^*) := \{3, 5\}$ . Dit zijn de punten die optreden in de zoekboom, uitgesorteerd naar de beide delen van de graaf. Het resultaat is de minimale overdekking  $U := \{b, d, 3, 5\}$  van  $G$ .

Merk op dat de grootte van deze minimum overdekking gelijk is aan de grootte van de maximumtoewijzing (nl., 4), zoals voorspeld door de stelling van König-Egerváry.

- (d) Zoek in de volgende kostenmatrix methodisch naar een minimale toewijzing. Geef de gevonden toewijzing en haar (totaal)gewicht.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 10 & 12 & 9 \\ 8 & 7 & 13 & 16 & 12 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 15 \\ 10 & 4 & 7 & 13 & 11 \\ 12 & 9 & 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Er is een (unieke) nultoewijzing met nullen op posities  $(2,1), (4,2), (5,3), (3,4), (1,5)$ . Dit geeft als optimale toewijzing het totaalbedrag  $8+4+10+13+9=44$ .

### 3. Combinatoriek

- (a) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Modelprobleem: aantal gehele oplossingen  $\geq 0$  van de gelijkheid  $x_1 + \dots + x_n = k$ , waar  $x_i$  = aantal brieven in bus  $i$ ,  $n$  = aantal brievenbussen, en  $k$  = aantal brieven. De oplossing hiervan is " $n+k-1$  kies  $k$ ".

Keuzeproces: kies eerst welke bus leeg blijft, steek daarna 1 brief

in elk van de overgebleven bussen. We kunnen de resterende 6 brieven dan willekeurig verdelen over die bussen (het standaard-probleem). Dit geeft:

(5 keuzes voor lege bus) maal

(aantal verdelingen van 6 brieven over 4 bussen).

Aantal manieren: 5 maal (4+6-1 kies 6). Berekening:

$$5 \cdot \binom{4+6-1}{6} = 5 \cdot \binom{9}{6} = 5 \cdot 84 = 420.$$

- (b) Bepaal het aantal oplossingen van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$$

waarbij  $x_1, \dots, x_4$  gehele getallen  $\geq 0$  voorstellen (redenering en formule volstaan).

Voer een nieuwe onbekende in:  $x_5 := 18 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ . We hebben nu het probleem van  $k=18$  knikkers in  $n=5$  bakjes, met aantal oplossingen =  $(k+n-1 \text{ kies } k) = (22 \text{ kies } 18)$ . Resultaat:

$$\binom{22}{18} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7315.$$

- (c) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal  $w_n$  van woorden met  $n$  symbolen 0,1, waarin nooit twee 1en naast elkaar voorkomen. Geef de redenering; je hoeft de betrekking niet op te lossen.

Het is duidelijk dat  $w_1=2$  (woorden "0" en "1") en dat  $w_2=3$  (woorden "00", "01", "10"). Voor  $n \geq 2$  bepalen we  $w_{n+1}$  als volgt. Een toegestaan woord van lengte  $n+1$  kan eindigen op '0' of op '1'.

- Eind-'0'. Het woord zonder laatste symbool kan om het even welk toegestaan woord van lengte  $n$  zijn. Aantal mogelijkheden:  $w_n$ .
- Eind-'1'. Het woord zonder laatste symbool moet op '0' eindigen. Aantal mogelijkheden:  $w_{n-1}$ .

Oplossing:  $w_{n+1} = w_n + w_{n-1}$ .

## 4. Recurrente betrekkingen en Machtreeksen

- (a) Algemene kennis.

- (i) Wat is de karakteristieke vergelijking van de recurrente betrekking  $a_n - 3a_{n-2} + 5a_{n-4} = 0$ ?

De karakteristieke vergelijking (kv) is:  $r^4 - 3r^2 + 5 = 0$ , met op te lossen onbekende  $r$ .

- (ii) Wat is de orde (diepte) van de recurrente betrekking uit (i)?

Orde is 4.

- (iii) Geef de formule voor het "uitgebreide binomium van Newton",

$$(1+X)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Dictaat p. 113.

- (b) Los de recurrente betrekking  $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$  ( $n \geq 2$ ) op onder de beginvoorwaarden  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -5/2$ .

Homogene oplossing. De k.v. is  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . De dubbele wortel is  $r = -1$ . Hieruit  $a_n^{(h)} = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n$ .

Particuliere oplossing. Het rechterlid is van de vorm  $b^n$ , en het grondtal  $b$  is tevens (dubbele) wortel van de k.v.. Voorstel:  $a_n^{(p)} = kn^2(-1)^n$ . Invullen in de recurrente betrekking geeft

$$kn^2(-1)^n + 2k(n-1)^2(-1)^{n-1} + k(n-2)^2(-1)^{n-2} \equiv (-1)^n.$$

De termen in  $n^2$  en  $n$  verdwijnen bij berekening uit het rechterlid. We vinden:  $k \cdot 2 \cdot (-1)^n \equiv (-1)^n$  en dus  $k = 1/2$ .

Algemene oplossing.  $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ . Dit geeft:  $k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n + 1/2 \cdot n^2(-1)^n$ .

Beginvoorwaarden.  $a_0 = 1$  geeft  $k_1 = 1$ .  $a_1 = -5/2$  geeft  $-k_1 - k_2 - 1/2 = -5/2$  en dus  $k_2 = 1$ . Oplossing van de betrekking:  $a_n = (-1)^n + n(-1)^n + 1/2 \cdot n^2(-1)^n$ .

- (d) Wat is de coëfficiënt van  $X^{10}$  in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

Je kan de reeks tussen de haken schrijven als  $X/(1-X)$ . De derde macht is  $X^3/(1-X)^{-3}$ . De formule hiervoor is (met gebruik maken van het binomium met  $\alpha := -3$ )

$$X^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} X^k.$$

De coëfficiënt van de tiende macht hoort bij de zevende graads term van de sommatie:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

Voor een "handmatige" berekening moet je tellen op hoeveel manieren je een term  $X^i \cdot X^j \cdot X^k$  kunt maken met  $i, j, k \geq 1$  en  $i+j+k=10$ . Daarbij komt  $X^i$  uit de machtreeks in de eerste factor van de derde macht,  $X^j$  uit de tweede factor, en  $X^k$  uit de derde. Dit is het "eendere knikkers in drie bakjes" probleem, waarbij in elk bakje alvast 1 knikker moet. De resterende zeven knikkers kun je vrij uitstrooien, en dat kan inderdaad op  $\binom{3+7-1}{7}$  manieren.

## 5. Coderingstheorie

- (a) Leg uit:

- (i) *Hamming afstand* tussen twee woorden.

Het aantal posities waarop de twee woorden verschillen.

- (ii) *twee-fouten detecterende code* (onder maximum likelihood decoding).

Als een codewoord overkomt met ten hoogste twee fouten, dan kan worden opgemerkt dat het geen codewoord is. I.h.a. kan niet worden aangegeven wat er fout is, of zelfs hoeveel fouten er zijn gebeurd.

- (iii) Een *drie-fouten verbeterende code* (onder maximum likelihood decoding).

Als een codewoord overkomt met ten hoogste drie fouten, dan is dit codewoord het enige op afstand  $\leq 3$ . De fout kan dus worden opgemerkt en in principe verbeterd.

- (b) Hoe zie je aan de check matrix van een lineaire code dat je

- (i) Eén fout kan detecteren?

De matrix heeft geen nulkolom.

- (ii) Twee fouten kan corrigeren?

Elke 4 kolommen zijn lineair onafhankelijk.

- (c) We beschikken over de binaire (modulo twee) check matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal het syndroom en, indien mogelijk, de fout, bij de volgende ontvangen woorden:

$$w_1 := (1, 1, 0, 0, 1) \quad w_2 := (1, 0, 1, 0, 0).$$

Het woord  $w_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$ . Bereken  $H \cdot w_1 = (0, 0, 1)$ . Dit is de derde kolom van  $H$ . Er is één fout en wel in het derde bit.

Het woord  $w_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ . Bereken  $H \cdot w_2 = (1, 0, 1)$ . Dit is geen kolom van  $H$  en dus is er méér dan één fout. Bij twee fouten kan dit syndroom ontstaan als kolom1+kolom3, maar ook als kolom2+kolom5. Er is dus geen correctie volgens maximum likelihood decoding mogelijk.

- (d) Zoek een generator matrix  $G$  bij de check matrix uit deel (c) en decodeer (indien mogelijk) de ontvangen woorden uit onderdeel (c) na eventuele correctie.

De matrix  $g$  ontstaat uit de bekende procedure: eenheidsblok naar de andere kant en het andere blok spiegelen (de mintekenregel hoeft niet modulo 2). Dat geeft

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alleen woord  $w_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$  kan worden gedecodeerd na correctie: het toegezonden codewoord was (waarschijnlijk)  $c = (1, 1, 1, 0, 1)$ . Het 2 bij 2 eenheidsblok van  $G$  staat achteraan. Een 2-bit informatiewoord  $(b_1, b_2)$  wordt gecodeerd als  $(b_1, b_2) \cdot G$ , en dat is dus een 5-bit woord met  $b_1 b_2$  in deze volgorde achteraan. Het woord "01" werd verstuurd.

## Normering

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1a: 3 | 2a: 3 | 3a: 5 | 4a: 4 | 5a: 3 | 6: 18 |
| b: 4  | b: 4  | b: 5  | b: 5  | b: 4  |       |
| c: 6  | c: 4  | c: 5  | c: 5  | c: 4  |       |
|       | d: 4  |       |       | d: 4  |       |
| 13    | 15    | 15    | 14    | 15    | 18    |

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

**Totaal te behalen = 90**

**Cijfer = Totaal/10 + 1**

Naam:

Studierichting en jaar:

19-12-07

## 6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. Een graaf  $G = (V, E)$  is een *tweedelingsgraaf* als

- o  $G$  geen driehoeken bevat.
- o  $G$  geen cykels bevat.
- o  $G$  geen even cykels bevat.
- o  $G$  geen oneven cykels bevat. ➡ DEZE

6.2. Onder een *centraal punt* van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom met takken van gelijke lengte.
- o Een punt waarvan de gemiddelde taklengte zo lang mogelijk is.
- o Een punt waarvan de langste tak zo kort mogelijk is. ➡ DEZE
- o Het zwaartepunt van de boom bij een gegeven toekenning van gewichten aan de lijnen.

6.3. De stelling van *Ford & Fulkerson* stelt dat in een netwerk met bron en put

- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom niet de minimum capaciteit van een snede tussen bron en put overtreft.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede tussen bron en put. ➡ DEZE
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.

6.4. Een  $k$ -herhalingscombinatie van  $n$  elementen is een keuze van  $k$  elementen uit een  $n$ -verzameling waarbij

- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen. ➡ DEZE

6.5. De *inverse*  $1/B$  van een machtreeks  $B$  bestaat precies dan als

- o  $B$  niet de nulreeks is.
- o  $B$  een konstante term  $\neq 0$  heeft. ➡ DEZE
- o als elke coëfficiënt van  $B$  van nul verschilt.
- o als  $B$  een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

6.6. Het *principe van inclusie-exclusie* in een universum  $U$  stelt dat het aantal elementen in  $U$  dat aan géén van  $t$  gegeven condities voldoet, gelijk is aan:

- o de alternerende som  $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$ , waar  $S_i$  de som is over alle  $i$ -tallen condities van het aantal elementen dat het  $i$ -tal condities voldoet. ➡ DEZE
- o de alternerende som  $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$ , waar  $S_i$  het aantal elementen is dat precies  $i$  condities overtreedt.
- o  $\#U$  min de som  $\sum_{i \leq t} S_i$ , waar  $S_i$  het aantal elementen is dat precies  $i$  condities voldoet.
- o het minimum over  $0 \leq i \leq t$  van  $S_i$ , waar  $S_i$  de som is over alle  $i$ -tallen condities van het aantal elementen dat het  $i$ -tal condities voldoet.