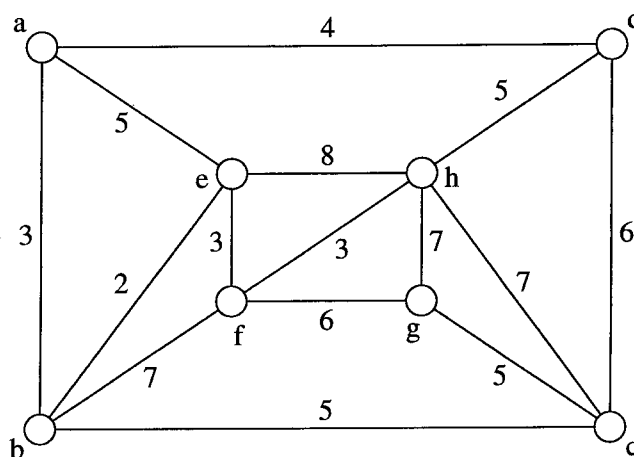


Discrete Wiskunde Veegtentamen 30-10-05

Tentamenduur: 3 uur. Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het Prim Algoritme

- (a) Algemene kennis: Geef de definitie van
- (i) een *boom*,
 - (ii) een *opspannende boom* in een graaf, en
 - (iii) een *minimale opspannende boom* in een gewogen graaf.
- (b) Beschrijf het algoritme van Prim voor het vinden van een minimale opspannende boom in een samenhangende gewogen graaf.
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. Geef bij keuze altijd de voorkeur aan de alfabetisch eerste mogelijkheid. (De figuur is overgenomen achteraan het multiple-choice blad.)



Figuur: gewogen graaf

2. Toernooien

- (a) Algemene kennis: leg uit:
- (i) Een *Hamilton pad* in een graaf.
 - (ii) Een *gericht Hamilton pad* in een gerichte graaf.
 - (iii) Een *toernooigraaf*.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	0

- (b) Beschrijf het algoritme waarmee je een gericht pad in een toernooigraaf kunt uitbreiden tot een gericht pad met één punt meer.
- (c) Construeer, volgens deze algoritme en mét toelichting, een Hamilton pad in de gerichte graaf, voorgesteld door de gegeven verbindingsmatrix.

- (d) Wat is een gerichte Hamiltongraaf? Laat zien dat de graaf uit deze opgave geen gerichte

Hamiltongraaf is.

3. Combinatoriek en recurrente betrekkingen

- (a) Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende eigenschap:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

- (b) Los de volgende recurrente betrekking op onder de gegeven beginvoorwaarden:

$$a_n - 4a_{n-2} = 2^{n+1} \quad (a_0 = 4, a_1 = 6)$$

- (c) Je wil k kippen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De kippen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven kippen zijn en vier hokken?
- (d) Wat is de coëfficiënt van X^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

4. Het principe van Möbius inversie.

- (a) Algemene kennis.

- (i) Geef de waarde van de *Möbius functie* in de volgende gevallen:

$$\mu(3), \mu(6), \mu(9), \mu(30).$$

- (ii) Gegeven is een geheel getal $n > 1$. We willen de getallen $\mu(d)$ optellen voor alle positieve delers d van n . Wat is de uitkomst? (Aanwijzing: Doe enkele tests.)

- (iii) Gegeven zijn twee functies $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Daarbij staat $d|n$ voor " d is een deler van n ". Het *Möbius inversie principe* zegt dat je nu omgekeerd $g(n)$ kunt oplossen naar f voor alle $n \in \mathbb{N}$. Geef de formule (je hoeft deze niet te bewijzen).

- (iv) Er worden kettingen gemaakt met een (vast gegeven) aantal beschikbare kleuren. De uitdrukking " $M(d)$ " staat voor het aantal cyclisch verschillende patronen zonder deelpatroon in een open ketting (met gekleurde kralen) van lengte d . Leg de betekenis uit van *cyclisch gelijk* en van *deelpatroon*.

- (b) We kijken naar open of gesloten kettingen van lengte l , waarbij kralen van k verschillende kleuren zijn toegestaan; de kralen zijn verder eender. Het aantal gesloten kettingen van lengte l noemen we $G(l)$. Leg bondig uit hoe je aan de volgende twee gelijkheden komt:

(i) $G(l) = \sum_{d|l} M(d)$ (aantal gesloten kettingen).

(ii) $k^l = \sum_{d|l} d \cdot M(d)$ (aantal open kettingen).

- (c) Pas het principe van Möbius inversie nu toe om een formule voor $M(d)$ te vinden. Bereken hiermee $M(6)$ bij $k=3$ kleuren.

N.B.: In dit onderdeel mag je de formules uit (b) gebruiken, ook al heb je dat onderdeel niet of onvolledig opgelost.

5. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis: leg uit:

- (i) De *minimum afstand* van een code.
- (ii) Een *twee fouten verbeterende code*.
- (iii) De *check matrix* van een lineaire code.

(b) Gegeven zijn de volgende check vergelijkingen voor een lineaire binaire code.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 0 \end{cases}$$

- (i) Geef de bijhorende checkmatrix H met het aantal rijen m en het aantal kolommen n .
- (ii) Geef een generator matrix G bij de check matrix, en geef het aantal rijen en het aantal kolommen van G .

Goede toelichting scoort.

(c) We gaan verder met de code uit deel (b).

- (i) Hoeveel fouten kan de bijhorende code detecteren/corrigeren?
- (ii) Wat is de dimensie en de informatiedichtheid van de code uit deel (b)?

Goede toelichting scoort.

(d) Coderen en decoderen.

- (i) Codeer de "pure informatie" vector $(1,1,0,1)$.
- (ii) Corrigeer en decodeer de ontvangen boodschap $(1,0,1,1,1,0,1)$ of leg uit waarom dit niet kan.

Goede toelichting scoort.

NORMERING:

1a: 3	2a: 3	3a: 4	4a: 4	5a: 3	MC: 16
1b: 4	2b: 3	3b: 5	4b: 5	5b: 3	
1c: 6	2c: 6	3c: 4	4c: 5	5c: 4	
	2d: 3	3d: 4		5d: 5	
13	15	17	14	15	16

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per fout antwoord.

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen vind je een uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (kursus DW 2004-2005), knop "Course Information", laatste folder.

Naam:

Studierichting en jaar:

30-10-05

6. Multiple Choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

6.1. Een graaf $G=(V, E)$ is een Euler graaf als

- o G een open wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.

6.2. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de capaciteit van een minimum snede.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimale capaciteit van een pijl.
- o bij een maximumstroom, de stroom door elke pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.

6.3. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G=(V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- o elke deelverzameling W van V_1 ten minste zoveel elementen heeft als de buurverzameling $B(W)$.
- o elke deelverzameling W van V_1 ten hoogste zoveel elementen heeft als de buurverzameling $B(W)$.
- o elke deelverzameling W van V_1 méér punten heeft dan zijn buurverzameling $B(W)$.
- o elke deelverzameling W van V_1 minder punten heeft dan zijn buurverzameling $B(W)$.

6.4. Het aantal oplossingen van de gelijkheid $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

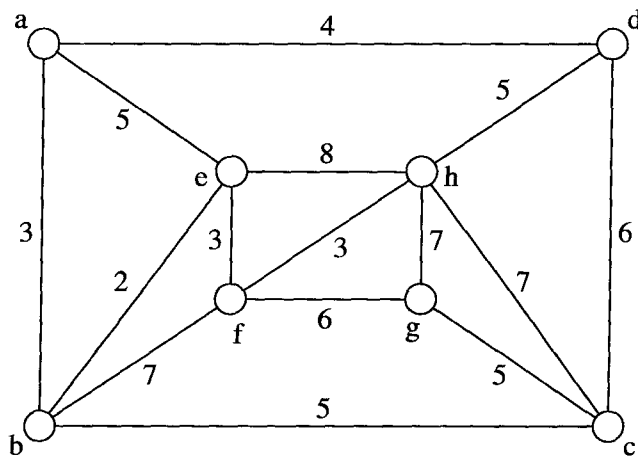
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.

6.5. Het uitgebreide binomium van Newton is een formule voor

- o $(x_1 + x_2)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel en x_1, x_2 reëel).
- o $(a + b)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel).
- o $(a + b)^r$ (waar r reëel).
- o $\frac{1}{(a + b)^n}$ (waar $n \geq 0$ geheel).

6.6. De machtreeks van de breuk $\frac{1}{(1+X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze deling kan niet worden uitgevoerd.



Figuur bij opgave 1: gewogen graaf

Geef bij keuze altijd de voorkeur aan de alfabetisch eerste mogelijkheid.