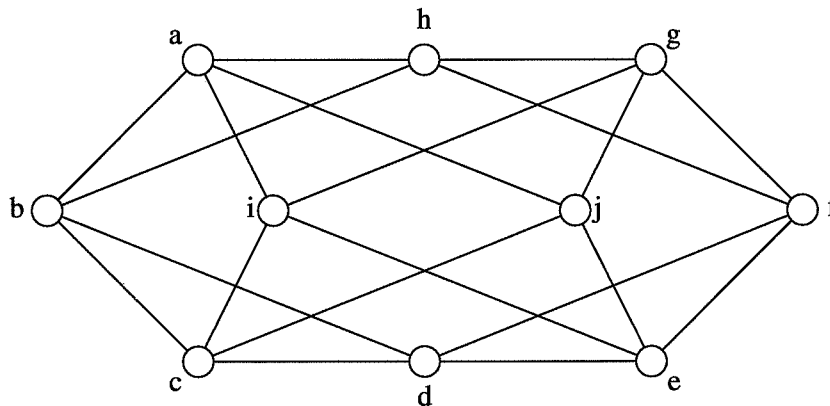


Discrete Wiskunde Tentamen 26-08-05

Tentamenduur: 3 uur. Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. De algoritme van Fleury

- (a) Algemene kennis. In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.
- (1) Wat bedoelt men met een *Euler toer* in een graaf?
 - (2) Wat is een *brug* in een graaf?
 - (3) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler toeren in een graaf.
- (b) Geef een korte beschrijving van het *Fleury algoritme* in een algemene Euler graaf (géén voorbeeld).
- (c) Geef een *Euler toer* in de graaf uit de volgende figuur (je mag de kopie achter het multiple choice formulier gebruiken om in te leveren). Het uiteindelijke antwoord moet een lijst van punten zijn in wandelvolgorde. Bij keuzevrijheid, gebruik het alfabetisch eerste punt.



- (d) Zij G een samenhangende graaf met precies vier onevengraadse punten. Laat zien dat de lijnen van G in twee parten kunnen worden opgedeeld, zó dat met de lijnen van ieder part een open wandeling kan worden gemaakt, met twee van de vier punten als eindpunten, en waarbij elke lijn maar één keer wordt gebruikt.

2. Koppelingen

- (a) Algemene kennis. Gegeven is een (gewone, ongerichte) graaf $G := (V, E)$.
- (1) Wat is een *koppeling* in G ?
 - (2) Wat is een *maximum koppeling* in G ?
 - (3) Wat is een *volledige koppeling* in G ?
- (b) Wat bedoelt men precies met een *F-vergroterend wisselpad* in een graaf $G := (V, E)$ met koppeling F ? Formuleer vervolgens de *stelling van Berge-Petersen* die over dit onderwerp handelt.
- (c) Twee spelers kiezen om beurt een punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk volgend punt zó gekozen te worden, dat het met een lijn verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen, verliest. Naargelang de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een *strategie* die voor één van de spelers winst verzekert.
- (i) Leg in beide gevallen de strategie (handelwijze) precies uit.
 - (ii) Leg uit met de stelling van Berge-Petersen waarom de beide strategieën in de gegeven situatie winst verzekeren en voor welke speler.

3. Tellen

- (a) Zeven personen nemen plaats aan een ronde feesttafel waar voor negen gedekt is. Op hoeveel manieren kan dit? Een formule met ruime toelichting volstaat.
- (b) Aan vier personen wordt gevraagd een cijfer van 1 tot 9 te noemen. Hoe groot is de kans dat een cijfer meer dan eens genoemd wordt? Argumenteer je antwoord.
- (c) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend.
 - (i) Geef met de nodige argumentatie de formule in k en h voor het aantal mogelijkheden.
 - (ii) Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

4. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- (a) Algemene kennis.
 - (1) Formuleer het *Laatjesprincipe*.
 - (2) Formuleer het *Principe van Inclusie/Exclusie*. Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen. Je hoeft niets aan te tonen.
 - (3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- (b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- (c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken vervolgens dit aantal voor $n = 4$.

5. Coderingstheorie

- (a) Algemene kennis.
 - (1) Wat bedoelt men met de *minimumafstand van een code*?
 - (2) Wat bedoelt men met een *lineaire code*?
 - (3) Laat $a \geq 2$ het aantal symbolen zijn in het gebruikte alfabet. Wat bedoelt men met de *informatiedichtheid* van een code?
- (b) Wat is het precieze verband tussen de *minimumafstand* δ van een code en het aantal fouten e dat je per woord kunt *detecteren*, resp., *corrigeren*?
- (c) In de woordruimte $W := \{0,1\}^6$ worden drie (parity) *check vergelijkingen* gegeven voor een binaire lineaire code C :
$$x_1 + x_2 = x_4,$$
$$x_1 + x_3 = x_5,$$
$$x_2 + x_3 = x_6.$$
 - (i) Hoeveel *codewoorden* heeft de code C en wat is de *informatiedichtheid* van deze code?
 - (ii) Wat is de *minimumafstand* van de code C ?
 - (iii) Hoeveel fouten kan je met C *detecteren*, resp. *corrigeren*?
- (d) Geef een *checkmatrix* H en een *generatormatrix* G voor de code uit deel c). Toelichting hoeft niet; je mag de resultaten uit dit onderdeel ook bij c) gebruiken indien gewenst.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	5	4a:	3	5a:	3
1b:	3	2b:	5	3b:	5	4b:	6	5b:	3
1c:	4	2c:	7	3c:	5	4c:	6	5c:	6
1d:	5							5d:	3
15		15		15		15		15	

Voor het multiple choice gedeelte (op 15 punten) geldt: -3 punten per fout antwoord.

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", allerlaatste folder, "Herkansing") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

Naam:

Studierichting en jaar:

26-08-05

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. Een graaf $G = (V, E)$ is een boom als

- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.
- o geen enkele komponent van G een cykel bevat.
- o G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.
- o G samenhangend is en elke lijn uit E een brug is.

6.2. De Dijkstra algoritme is een algoritme die

- o een minimale toewijzing bepaalt in een gewogen graaf.
- o een minimale padenboom bepaalt in een gewogen graaf.
- o een maximale stroom bepaalt in een netwerk.
- o een minimale rondwandeling bepaalt in een afstandsgraaf.

6.3. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is

- o de uitstroom in een willekeurig punt (maar niet p).
- o de uitstroom in de bron b .
- o de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
- o de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p .

6.4. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

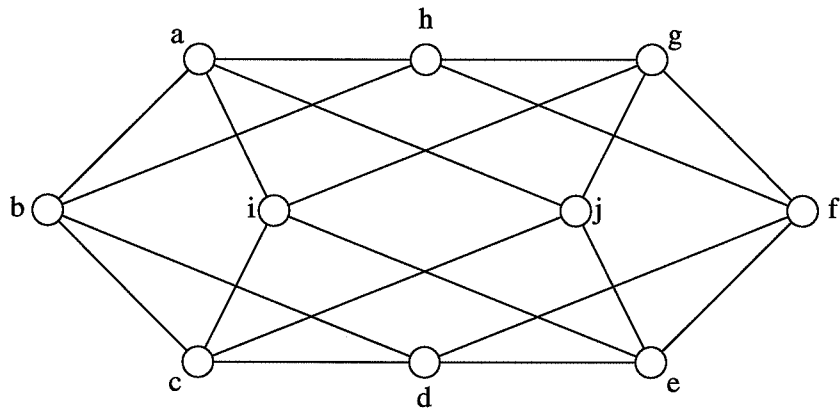
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het aantal volledige koppelingen (= kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.
- o het aantal verschillende mogelijkheden om de lijnen van de graaf netjes te kleuren.

6.5. De genererende functie van een rij $(a_n)_n$ is

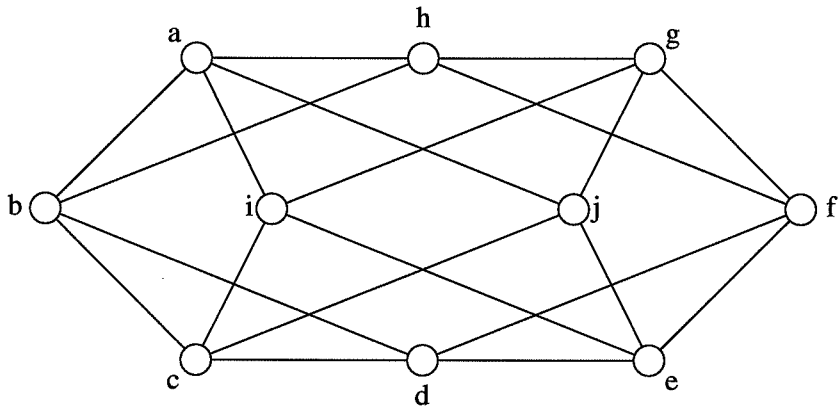
- o het algoritme waarmee de elementen a_n achtereenvolgens gegenereerd worden.
- o de formule waarmee de recurrente betrekking wordt beschreven.
- o de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- o de functie $f(n) = a_n$ voor $n \in \mathbb{N}$, die de recurrente betrekking oplost.

6.6. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.
- o geen van voorgaande.



Figuur: de graaf bij vraag 1c



Figuur: de graaf bij vraag 1c