

Discrete Wiskunde Tentamen 01-06-05

Tentamenduur: 3 uur. Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Dominostenen

Op een k -dominosteen staan twee al dan niet verschillende getallen $0, 1, \dots, k$. Een volledige set k -dominostenen bevat elke (herhalings)combinatie van twee getallen precies één keer. Het is de bedoeling stenen in een grote lus aan mekaar te leggen, zó dat op de aangrenzende velden van twee stenen hetzelfde getal staat.

(a) Algemene kennis.

(1) Geef een grafentheoretische beschrijving van een set k -dominostenen.

(2) Formuleer de stelling van Euler over het bestaan van bepaalde gesloten wandelingen in een graaf G .

(b) Bij welke waarden van k kun je een kring van k -dominostenen leggen die alle stenen gebruikt, en voor welke kan dat niet? Leg uit.

(c) Laat $k \geq 3$. Als er géén gesloten figuur bestaat die alle k -stenen bevat, hoeveel stenen (uitgedrukt in k) blijven er dan minimaal over? Beredeneer je antwoord.

2. Het Prim Algoritme

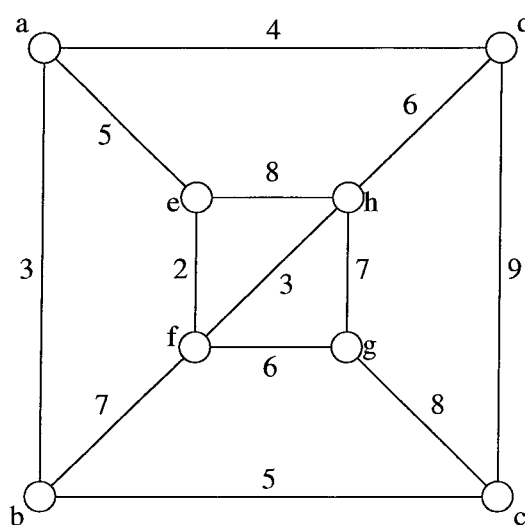
(a) Algemene kennis.

(i) Wat is een *opspannende boom* in een graaf?

(ii) Welke voorwaarde(n) zijn nodig en voldoende voor een graaf om een opspannende boom te bezitten?

(b) Beschrijf het *algoritme van Prim* voor het vinden van een minimale opspannende boom in een gewogen graaf.

(c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. Wanneer meerdere keuzes mogelijk zijn, kies dan voor de mogelijkheid die alfabetisch eerst komt. (N.B.: De figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.)



Figuur bij Opgave 2: het Prim Algoritme

3. Tellen

- (a) We hebben k verschillende pakjes, en deze moeten in een kring rond de kerstboom worden gelegd.

(1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?

(2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal het aantal mogelijkheden wanneer $k = 9$.

Een formule met toelichting volstaat in beide onderdelen a1) en a2).

- (b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

- (c) Zeventien identieke knikkers worden verdeeld over zes verschillende potjes, waarbij precies twee potjes leeg dienen te blijven en precies één potje een oneven aantal knikkers moet bevatten. Hoeveel mogelijke resultaten zijn er? Geef toelichting bij de uitkomst. **Aanwijzing:** tel aan de hand van een keuzeprocess dat in enkele fasen verloopt.

4. Recurrente betrekkingen

- (a) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4)$$

- (b) Los volgende recurrente betrekking op met behulp van genererende functies:

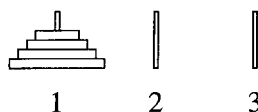
$$a_n - 3a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

Bepaal hiermee a_9 en a_{10} .

- (c) We hebben n schijven van verschillende diameter aan een pin geregen, in volgorde van stijgende diameter: de grootste onder, de kleinste boven. We beschikken verder over een tweede en derde pin. De opdracht is, om alle schijven over te brengen naar één van de "lege" pinnen. Er zijn twee spelregels:

1. Er mag maar één schijf tegelijk verplaatst worden.
2. Een grotere schijf mag nooit boven een kleinere schijf liggen.

Het minimum aantal verplaatsingen noemen we a_n .



Figuur: Beginschikking Torens van Hanoi

(i) Geef a_2 en a_3 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

5. Coderingstheorie

- (a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met de *Hamming afstand* tussen twee woorden?

(ii) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding*?

N.B.: Formuleer precies.

- (b) Gegeven is een generator matrix G voor een lineaire, binaire code.

- (i) Ga na hoeveel informatie- en check symbolen er zijn, en
(ii) codeer het meegegeven bericht $\vec{b}$.

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := (1, 0, 1).$$

- (c) (Vervolg deel (b)) Schrijf de bijhorende check matrix H uit.
(d) (Vervolg delen (b) en (c)) Een gecodeerd bericht $\vec{w} := (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ wordt ontvangen. Decodeer dit bericht na een eventuele fout te hebben verbeterd, of geef aan waarom de fout niet kan worden verbeterd.

Normering

1a: 4	2a: 3	3a: 5	4a: 5	5a: 3	6: 19
b: 5	b: 3	b: 5	b: 5	b: 4	
c: 5	c: 6	c: 5	c: 5	c: 4	
				d: 4	
14	12	15	15	15	19

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", folder "Hoofdtentamen DW") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Naam:

Studierichting en jaar:

01-06-05

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

6.1. Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf

- o een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
- o een rondwandeling langs alle punten te vinden van minimaal gewicht.
- o een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
- o een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.

6.2. De stelling van Berge-Petersen zegt:

- o Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

6.3. De Hongaarse methode betreft de constructie van

- o een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf.
- o een latijns vierkant uit een latijnse rechthoek.
- o een maximale wisselboom in een tweedelingsgraaf.
- o een maximum stroom in een netwerk.

6.4. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met n kralen als er k kleuren beschikbaar zijn. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijf je dit probleem:

- o Een n –kombinatie van k elementen?
- o Een n –herhalingskombinatie van k elementen?
- o Een n –rangschikking van k elementen?
- o Een n –herhalingsrangschikking van k elementen?
- o Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in k eendere porties.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq k$.

N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

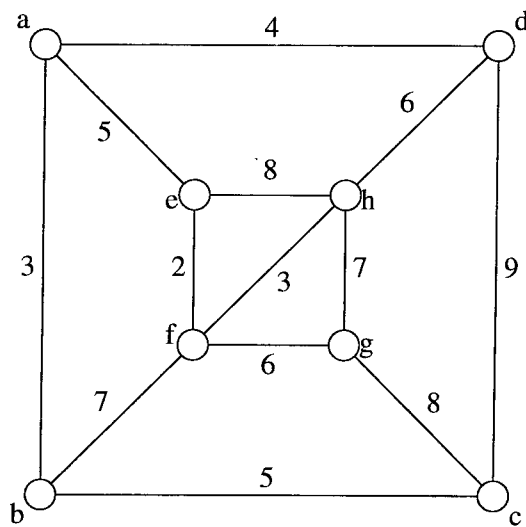
6.6. Het principe van inclusie-exclusie in een "universum" U stelt dat het aantal elementen in U dat aan géén van t condities voldoet, gelijk is aan:

- o de alternerende som $\sum_{1 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i de som is over alle i -tallen condities van de aantallen elementen die deze i condities overtreden.
- o de alternerende som $\sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i de som is over alle i -tallen condities van de aantallen elementen die aan deze i condities voldoen.

- o de alternerende som $\sum_{1 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat precies i condities overtreedt.
- o de alternerende som $\sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat aan precies i condities voldoet.

6.7. Een perfect 3 fouten verbeterende code is een code waarbij

- o voor ieder woord met ten hoogste drie fouten een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- o voor ieder woord een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- o voor ieder woord een gegarandeerd correcte decoding bestaat, zodat ten hoogste drie fouten hoeven te worden gecorrigeerd.
- o ieder woord met ten hoogste drie fouten correct kan worden gecorrigeerd.



Figuur bij Opgave 2: de Prim Algoritme