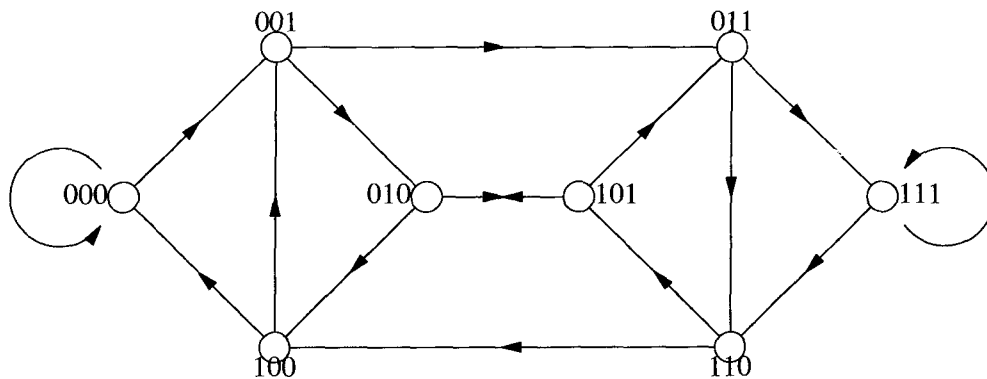


Discrete Wiskunde Voortentamen 29-03-05

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Gerichte Euler grafen

- a) Algemene kennis.
- 1) Wat is een *gerichte Euler toer*?
 - 2) Wat is een *gerichte Euler graaf*?
 - 3) Formuleer de *Stelling van Euler* met betrekking tot gerichte grafen.
 - 4) Formuleer het *algoritme van Fleury* voor het vinden van een gerichte Euler toer in een gerichte graaf.
- b) Pas het gerichte algoritme van Fleury toe om een Euler toer te vinden in volgende *gerichte graaf van De Bruijn*.



Figuur: gerichte De Bruijn graaf van orde 3

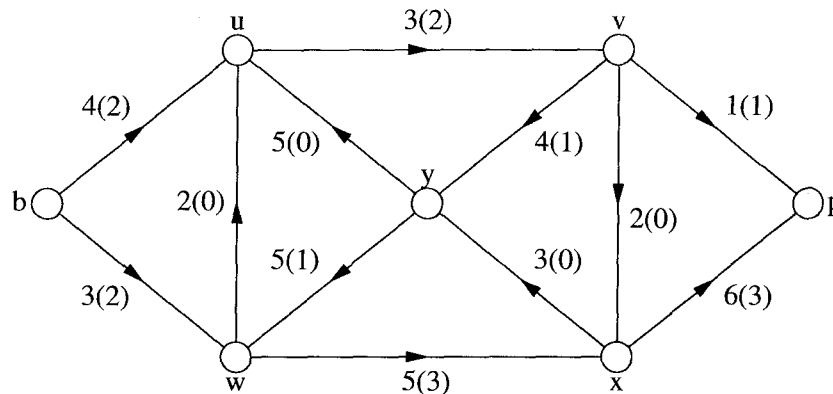
N.B.: Op de achterzijde van het blaadje met multiple choice vragen staat de De Bruijn graaf nog twee keer getekend. Je kan die figuur eventueel gebruiken voor je antwoord bij onderdelen b) en c).

- c) In een vereenvoudigde *teleprinter* worden 4 sensoren gebruikt om 4 opeenvolgende bits te lezen die in de ronde zijn aangebracht op een schijf. Leg uit hoe de De Bruijn graaf leidt tot een efficiënt ontwerp van zo'n circulaire bitrij.

Aanwijzing: geef geschikte labels aan de pijlen van de De Bruijn graaf.

2. Stromen in netwerken

- a) Algemene kennis.
1. Wat is de *stroomsterkte* van een stroom in een netwerk?
 2. Wat is een *snede* tussen bron en put?
 3. Wat verstaat men onder de *capaciteit van een snede*?
 4. Wat verstaat men onder de *stroom over een snede*?
- b) Formuleer de *Stelling van Ford en Fulkerson* over stromen in een netwerk.
- c) Construeer door middel van *stroomverhoging* een maximum geheeltallige stroom in volgend netwerk. Geef de tussenstappen, en geef de gevonden maximum stroom.



N.B.: Deze figuur is in viervoud overgenomen achter het in te leveren multiple-choice gedeelte voor eventueel gebruik als antwoord.

- d) Geef een *minimum snede* in voorgaand netwerk.

3. Toewijzingen

- a) Algemene kennis. Gegeven is een tweedelingsgraaf $(V_1, V_2; E)$.
1. Wat bedoelt men met een *toewijzing* van een verzameling $W \subseteq V_1$ in V_2 ?
 2. Formuleer de *Stelling van Hall* over toewijzingen in een tweedelingsgraaf.
 3. Wat bedoelt men met het *burentekort* in $(V_1, V_2; E)$?
 4. Hoe kun je de Stelling van Hall aanpassen ingeval van burentekort?
- b) Geef een beknopte beschrijving van de *Hongaarse Methode* voor het vinden van een maximum toewijzing.
- c)
- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Zoek met bovengenoemde methode een maximum toewijzing in de tweedelingsgraaf met de hiernaast gegeven 5×5 incidentiematrix. De punten van deze graaf zijn $r_1, \dots, r_5$ (rijen) en $k_1, \dots, k_5$ (kolommen). |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | |

Begin met de koppeling F , bestaande uit $r_1 - k_2, r_2 - k_5, r_3 - k_1, r_4 - k_4$. Bepaal *systematisch* het burentekort en de bijhorende "flessenhals" $W^* \subseteq \{r_1, \dots, r_5\}$.

- d) Hoeveel strips (volledige rijen of kolommen) heb je minimaal nodig om alle enen af te plakken in de incidentiematrix? Leg het verband uit met het resultaat in onderdeel c).

Normering

1a:	6	2a:	6	3a:	6	MC	20
1b:	9	2b:	4	3b:	4		
1c:	9	2c:	7	3c:	8		
		2d:	7	3d:	4		
	24		24		22		20

Totaal = 90. Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -4 punten per fout antwoord.

$$\text{CIJFER} = \frac{\text{BEHAALD TOTAAL}}{10} + 1$$

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie op blackboard (Knop "Course information", laatste folder). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Naam:

Studierichting en jaar:

29-03-05

4. Multiple choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist en (meest) volledig.
- Niet gokken: -4 punten per fout antwoord.

4.1. Een graaf $G = (V, E)$ is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als

- o G een nette lijnkleuring bezit met twee kleuren.
- o V bestaat uit twee disjuncte deelverzamelingen V_1, V_2 , zo dat iedere lijn uit E een uiteinde heeft in V_1 en in V_2 .
- o E bestaat uit twee disjuncte deelverzamelingen E_1, E_2 , zo dat een lijn uit E_1 en een lijn uit E_2 nooit een uiteinde gemeen hebben.
- o G precies twee componenten heeft.

4.2. Een graaf $G = (V, E)$ is een boom als

- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.
- o $|V| = |E| + 1$ en G een wortel heeft.
- o G geen cycli heeft en door toevoegen van een lijn tussen twee bestaande punten altijd een cykel ontstaat.
- o G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.

4.3. Een Hamilton graaf is een graaf waarin een gesloten wandeling bestaat die langs alle punten komt en

- o die een minimum aantal punten doorloopt (meervoudige doorgangen tellen mee).
- o die een minimum aantal lijnen doorloopt (meervoudige doorgangen tellen mee).
- o die meer bepaald langs elk punt één keer komt.
- o die meer bepaald langs elke lijn één keer komt.

4.4. Met het Dijkstra algoritme construeert men

- o een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
- o een minimale-paden boom in een gewogen graaf.
- o een maximale stroom in een netwerk.
- o een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.

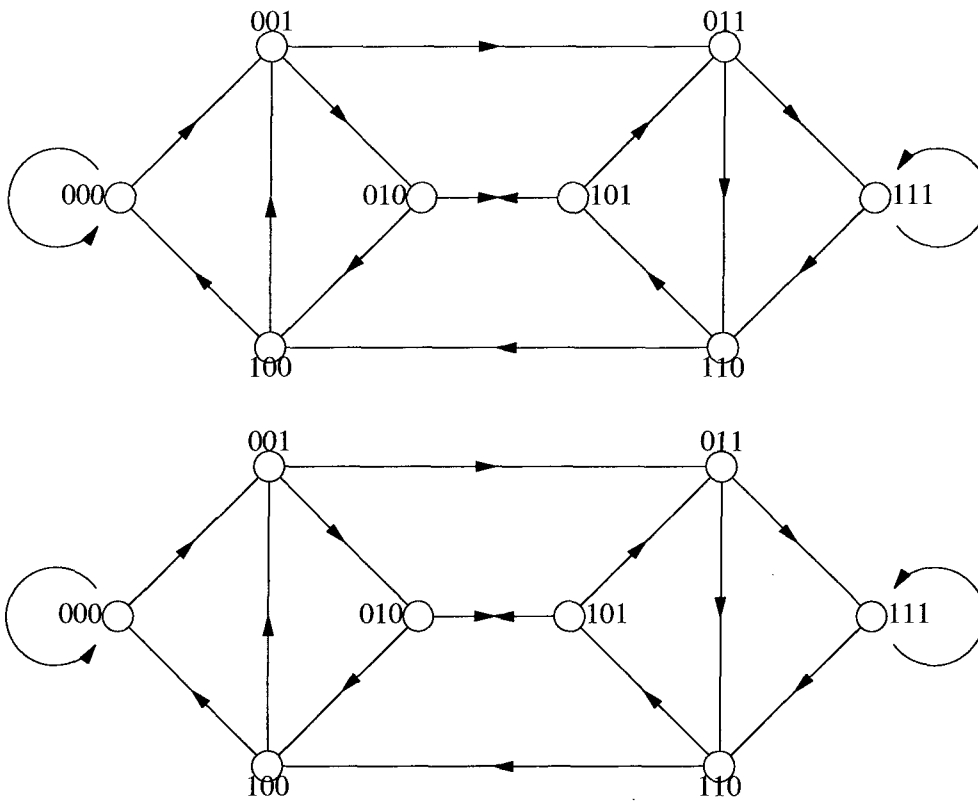
4.5. Een koppeling in een graaf $G = (V, E)$ is gedefinieerd als

- o een maximale samenhangende deelgraaf F van G .
- o een verzameling F van extra lijnen zo dat alle componenten van G onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit F .
- o een deelverzameling F van lijnen in E zo dat geen vergrotend F -wisselpad bestaat in G .
- o een deelverzameling F van lijnen in E zodat geen twee lijnen uit F een uiteinde gemeen hebben.

4.6. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

- o het maximale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het aantal volledige koppelingen (= nette kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.

Werkfiguur bij opgave 1



Figuur: gerichte De Bruijn graaf van orde 3

Werkfiguren bij opgave 2

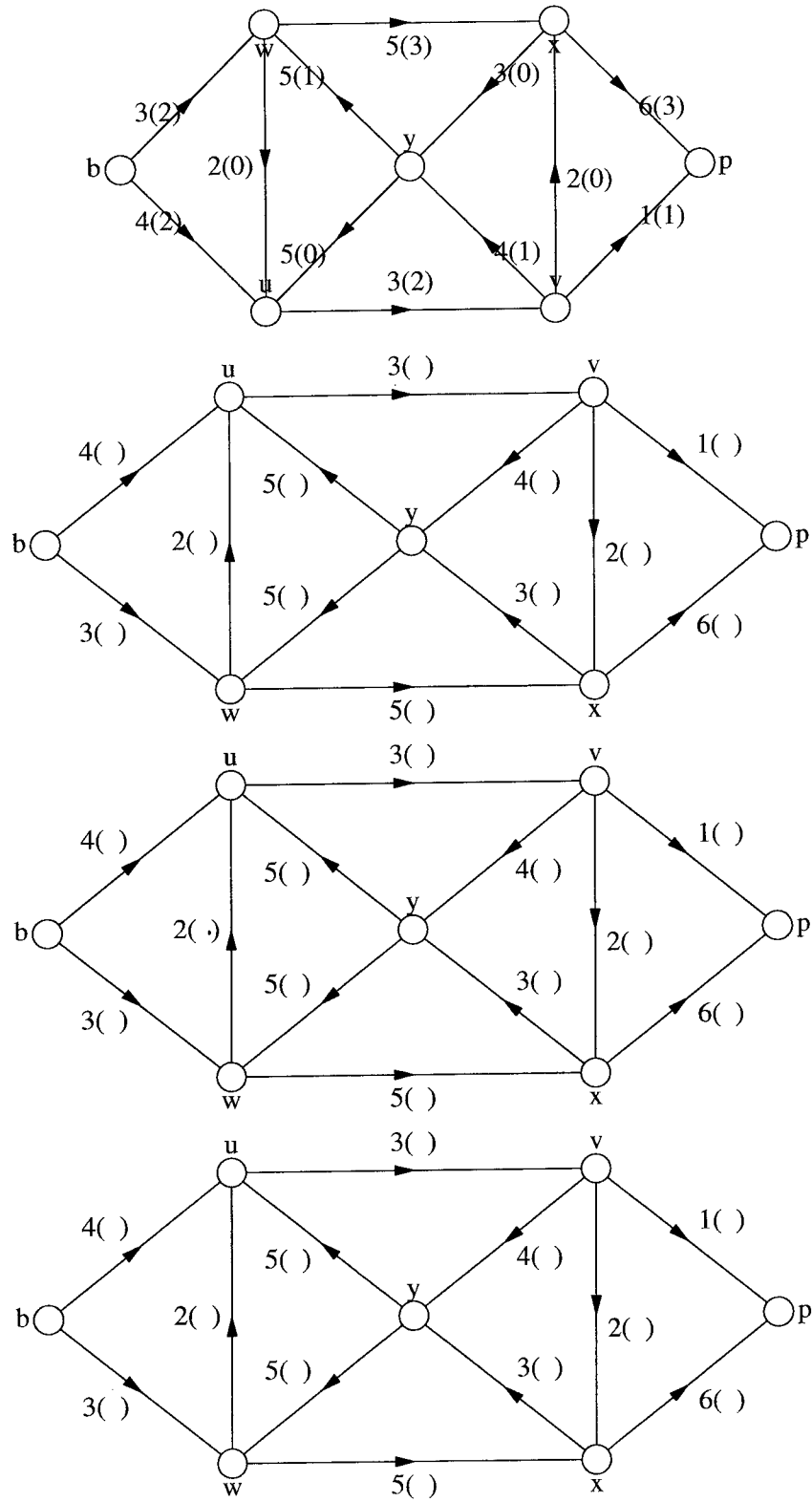


Fig.: netwerk met stroom bij opgave 2.