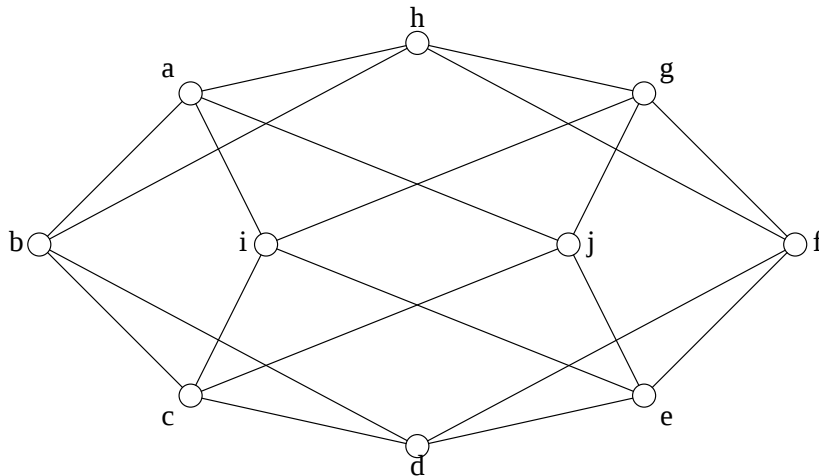


Discrete Wiskunde Tentamen 25-05-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het algoritme van Fleury

- a) Algemene kennis. In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.
- 1) Wat bedoelt men met een *gesloten Euler wandeling* in een graaf?
Een gesloten Euler wandeling is een gesloten wandeling die elke lijn van de graaf precies één keer aandoet.
 - 2) Wat is een *brug* in een graaf?
Een brug is een lijn die bij wegname het aantal componenten doet toenemen.
 - 3) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler wandelingen in een graaf.
De Stelling van Euler zegt dat een samenhangende graaf een gesloten Euler wandeling heeft precies dan als de graaf samenhangend en evengraads is.
- b) Geef een korte beschrijving van de *Fleury algoritme* in een algemene Euler graaf (géén voorbeeld).
Begin de wandeling in een willekeurig punt. Elke lijn die je afstapt wordt vervolgens uit de graaf verwijderd ("restgraaf"). Kies als volgende lijn een die geen brug is in de restgraaf, tenzij zo'n brug je enige keuze is.
- c) Geef een Euler wandeling in de graaf uit volgende figuur (je mag de kopie bij het multiple choice formulier gebruiken). Het uiteindelijke antwoord moet een lijst van punten zijn in de volgorde van wandelen.



Ter controle: de graaf heeft 20 lijnen (10 punten en 4-regulier, dus 40 incidenties, dus 20 lijnen). We spreken af dat we de punten altijd in alfabetische orde in overweging nemen. We kiezen altijd het eerst mogelijke. Begin dus in punt a. We vinden achtereenvolgens:

ab-bc-cd-db-bh-ha-ai-ic-cj-je-ed-df-fe-ei-ig-gf-fh-hg-gj-ja
01-02-03-04-05-06-07-08-09-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20

Valkuil na de eerste doortocht in j (9e lijn): ga niet naar a, want de lijn "ja" is op dat moment een brug in de restgraaf.

- d) Toon aan dat een samenhangende graaf met precies 2 onevengraadse punten een open Euler

wandeling heeft met deze twee punten als eindpunten.

Diktaat Open Universiteit: stelling 8.11 p. 62 en P-opgave 8.26 p. 76.

Voeg een extra punt toe, en verbind dit punt met de beide punten van oneven graad. De resulterende graaf is evengraads en samenhangend, en heeft dus een Euler toer. Haal vervolgens de twee toegevoegde lijnen weer weg. In de Euler toer wordt daarmee de doorgang door het extra punt ge-elimineerd. Het resultaat is dus een open Euler wandeling met de onevengraadse punten aan de rand als begin en eind.

2. Koppelingen

a) Algemene kennis. Gegeven is een (gewone, ongerichte) graaf $G := (V, E)$ en een koppeling F in G .

1) Wat is een *koppeling* in G ?

Een koppeling F in G is een deelverzameling F van de lijnencollectie E van G , waarbij geen twee verschillende lijnen van F incident zijn (dwz: geen eindpunt gemeen hebben).

2) Wat is een *maximum koppeling* in G ?

Een maximum koppeling in G is een koppeling F met het grootste mogelijke aantal lijnen. Dit houdt dus in dat F niet meer kan worden uitgebreid met extra lijnen, maar het is nog sterker.

3) Wat is een F -onverzadigd punt van de graaf G ?

Een F -onverzadigd punt van de graaf G is een punt dat niet incident is met een koppellijn uit F .

4) Wat is een F -*vergroten* wisselpad van de graaf G ?

Een F -vergroten wisselpad van de graaf G is een pad met afwisselend koppellijnen / niet koppellijnen ("wisselpad") en bovendien zijn de beide eindpunten F -onverzadigd. De naam verwijst naar een resultaat dat garandeert dat met zo'n pad een nieuwe koppeling kan worden gemaakt uit F die één lijn meer heeft.

b) Formuleer de *stelling van Berge-Petersen* over F -vergroten wisselpaden.

De stelling van Berge-Petersen zegt: een koppeling F in de graaf G is een maximum koppeling precies dan als G geen F -vergroten wisselpaden heeft.

c) Twee spelers kiezen om beurt een punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk volgend punt zó gekozen te worden, dat het met een lijn verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen, verliest. Naargelang de eigenschappen van de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een strategie die winst verzekert. Leg deze strategieën uit, geef aan wanneer ze worden toegepast, en geef het verband met de stelling van Berge-Petersen aan.

Diktaat Open Universiteit voorbeeld 13.14 p. 188 en verder: het "koppelspel".

Als er een volledige koppeling bestaat, dan heeft speler 2 een winnende strategie ("volg de koppellijn in het punt dat laatst door speler 1 werd gebruikt"). Als er een niet-volledige maximum koppeling bestaat, dan heeft speler 1 een winnende strategie ("begin met een onverzadigd punt; volg nadien altijd de koppellijn in het punt dat laatst door speler 2 werd gebruikt").

De laatste strategie vereist een bewijs: er is altijd een koppellijn aanwezig in het punt dat speler 2 heeft aangeduid, zoniet was er een vergrotende wisselketen.

3. Combinatoriek

- a) Laat $0 < k \leq n$ gehele getallen zijn. Op hoeveel verschillende manieren kunnen k personen op n stoelen plaatsnemen als

- 1) die stoelen op een rij staan.

Elke "zitting" kan op unieke wijze worden weergegeven door middel van een injectieve functie $Personen \rightarrow Stoelen$ (verschillende personen nemen een verschillende stoel). Daarbij is $\#Personen = k$ en $\#Stoelen = n$. Het gaat hier dus om het (model)probleem van k -rangschikkingen van n , met als oplossing voor het aantal mogelijkheden:

$$(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

- 2) die stoelen in een kring staan.

Omdat de personen herkenbaar verschillend zijn, kun je een gesloten kring van n stoelen, met daarop k personen verspreid, op n manieren openknippen tot herkenbaar verschillende rijen (wie zit eerst?). Het aantal oplossingen is dus n keer lager dan in

a)1):

$$\frac{1}{n} \cdot (n)_k = (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Geef telkens de redenering en de formule.

- b) Bepaal het aantal oplossingen van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$$

waarbij $x_1, \dots, x_4$ gehele getallen ≥ 0 voorstellen (redenering en formule volstaan).

Vergelijk met P-opgave 2.15 uit het diktaat Open Universiteit p. 56. Voer een vijfde onbekende in:

$$x_5 := 18 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4.$$

Nu is $\sum_{i=1}^5 x_i = 18$ en $x_5 \geq 0$. Dit is het modelprobleem voor 18-herhalingscombinaties van 5 (vergelijk: "18 eendere knikkers over 5 verschillende bakjes"), met als oplossing:

$$\binom{5}{5+18-1} = \frac{22!}{5! \cdot 17!} = 26,334.$$

Bij elke oplossing $(x_1, \dots, x_5)$ kun je x_5 weglaten, want die kun je altijd berekenen uit $x_1, \dots, x_4$. Het gevonden aantal is dus het gevraagde aantal oplossingen.

- c) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal woorden van lengte n met twee symbolen a, b , waarin nooit twee b 's naast elkaar voorkomen. Geef de redenering; je hoeft de betrekking niet op te lossen.

Vergelijk met P-opgave 3.32 uit het diktaat Open Universiteit p. 94, waar het gaat om nullen en enen.

Laat a_n het aantal woorden van lengte n voorstellen. Om woorden van lengte n te krijgen, gebruik je woorden van lengte $n-1$ waaraan één symbool (a of b) is toegevoegd. Eindigt het woord van lengte n op

'a', dan komen alle woorden van lengte $n-1$ in aanmerking (a_{n-1} stuks). Eindigt het woord van lengte n op 'b', dan komen alleen die woorden van lengte $n-1$ in aanmerking die eindigen op a (a_{n-2} stuks). Bijgevolg is $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ voor $n \geq 2$.

Tenslotte is $a_1 = 2$ (twee toegestane woorden "a", "b") en $a_2 = 3$ (drie toegestane woorden "aa", "ab", "ba").

4. Machtreeksen en Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis.

- 1) Geef het klassieke binomium van Newton voor $(1+X)^n$, waar n een natuurlijk getal is. Gegeven $n=5$, bereken de coëfficiënt van X^3 .

Klassieke binomium van Newton:

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k = \binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 + \dots + \binom{n}{n} X^n.$$

Daarbij is

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{i.h.b. } \binom{n}{0} := 1)$$

het aantal k -combinaties van n . Voor $n:=5$ is de coëfficiënt van X^3 gelijk aan

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

- 2) Zij α een reëel getal en $k > 0$ geheel. Geef een formule voor $\binom{\alpha}{k}$ voor $k \geq 0$.

Voor $k \geq 1$ geheel is de definitie:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}.$$

De teller bevat precies k factoren. Als α geheel is en $k > \alpha$, dan bevat de teller de factor $\alpha - \alpha$ en het resultaat is dus nul.

Het geval $k=0$ apart definiëren: $\binom{\alpha}{0} := 1$.

- 3) Geef het (veralgemeende) binomium van Newton voor $(1+X)^\alpha$, waarin de getallen uit a)2) optreden, en laat zien dat deze machtreeks overeenstemt met het klassieke binomium wanneer α geheel positief is.

Veralgemeende binomium van Newton:

$$(1+X)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} X^k.$$

Voor α geheel positief en $k > \alpha$ is $\binom{\alpha}{k} = 0$, waardoor de machtreeks in a)3) reduceert tot de veelterm uit a)1).

b) Laat zien dat voor iedere n geheel positief geldt:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} := \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Het is de binomiaalontwikkeling van $(1+X)^n$, waarbij je "-1" invult voor X .

c) Toon aan dat

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \cdot k} \cdot \binom{2k-2}{k-1}$$

voor $k > 0$ geheel. Geef nu de machtreeks voor $\sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2}$.

Diktaat Open Universiteit, P-opgave 4.44 p. 117.

- d) Bepaal met de resultaten uit (c) een oplossing voor de recurrente betrekking

$$a_{n+1} = 2 \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot a_{n-j} \quad (n \geq 0, a_0 = 1).$$

Geef de tussenstappen van je methode en de eindformule voor a_n duidelijk aan. Bereken aan de hand van deze formule de waarde van a_4 .

Zij $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de genererende functie van de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. We vermenigvuldigen beide leden van de recurrente betrekking met X^{n+1} ($n \geq 0$) en sommeren voor $n=0$ tot ∞ . Dit geeft de volgende vergelijking:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} X^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2X \cdot \left(\sum_{j=0}^n a_j \cdot a_{n-j} \right) X^n.$$

In termen van de onbekende machtreeks A geeft dit: $A - a_0 = 2X \cdot A^2$. Dit wordt een vierkantsvergelijking $2X \cdot A^2 - A + 1 = 0$ met nulpunten

$$(\dagger) \quad \frac{1 \pm (1-8X)^{1/2}}{4X}.$$

Let op: door de machtreeks " $4X$ " kan je normaliter niet delen (geen constante term). Er moet een factor X zijn in de teller om te schrappen. Met het resultaat uit (c) hebben we:

$$(1-8X)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} \cdot n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot (-2^3 X)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+n-1} \cdot 2^{3n}}{2^{2n-1} \cdot n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot X^n.$$

Om een factor " X " te krijgen in de teller van ($\dagger$) moeten we voor de "-" oplossing gaan:

$$\frac{1 - (1-8X)^{1/2}}{4X} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} X^n$$

(teller vanaf nul laten beginnen). Dat geeft de formule

$$a_n = \frac{2^n}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0).$$

In het bijzonder vinden we:

$$a_4 = \frac{2^4}{5} \cdot \binom{8}{4} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 224.$$

5. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *Hamming afstand* tussen twee woorden van zelfde lengte n ?

De Hamming afstand tussen twee woorden van zelfde lengte n is het aantal posities waarin die woorden verschillen.

- 2) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding*?

Met maximum likelihood decoding wordt bedoeld dat een ontvangen woord wordt vertaald naar het unieke, meest nabij codewoord.

3) Wat bedoelt men met 3-fouten verbeterende code?

Een code is 3-fouten verbeterend wanneer ieder ontvangen woord, waarbij ten hoogste drie fouten zijn opgetreden, met maximum likelihood correct wordt terugvertaald naar het verzonden woord.

b) Hoe zie je aan de check matrix van een lineaire code dat je

1) Eén fout kan detecteren?

Er is geen nul kolom.

2) Twee fouten kan corrigeren?

Elke vier kolommen zijn lineair onafhankelijk.

c) We beschikken over de binaire (modulo twee) check matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal het syndroom en, indien mogelijk, het foute bit, bij de volgende ontvangen woorden:

$(1, 1, 0, 0, 1)$ $(1, 0, 1, 0, 0)$.

Merk eerst op dat elke twee kolommen van H lineair onafhankelijk zijn (geen veelvoud van elkaar), en dat de laatste drie kolommen lineair afhankelijk zijn. Dus kan de bijhorende code 2 fouten detecteren en 1 fout corrigeren, en niet meer dan dat.

Het syndroom van $\vec{w} := (1, 1, 0, 0, 1)$ is de 3-vector

$$H \cdot \vec{w} = kol_1 + kol_2 + kol_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit is de derde kolom van H . Er is een fout in de derde positie. Het gecorrigeerde codewoord is: $(1, 1, 1, 0, 1)$.

Het syndroom van $\vec{w} := (1, 0, 1, 0, 0)$ is de 3-vector

$$H \cdot \vec{w} = kol_1 + kol_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit is geen kolom van H , en er moet meer dan 1 fout zijn opgetreden. Volgens de theorie (zie begin oplossing) is er geen garantie dat we hier uitkomen met maximum likelihood decoding. Het lukt, concreet, ook niet: het syndroom is gelijk aan $kol_1 + kol_3$ met foutvector $(1, 0, 1, 0, 0)$, en aan $kol_2 + kol_5$ met foutvector $(0, 1, 0, 0, 1)$. Er zijn dus twee meest nabij gelegen codewoorden op afstand twee: $(0, 0, 0, 0, 0)$ bij de eerste mogelijkheid, en $(1, 1, 1, 0, 1)$ bij de tweede mogelijkheid.

d) Geef een generator matrix G bij de check matrix uit deel c).

De check matrix is "systematisch" (eenheidsblok vooraan). De generator matrix G wordt dan gevonden uit een standaard procedure: twee bij vijf matrix, eenheidsblok achteraan, vooraan het gespiegelde resterende blok van H :

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal nu

1) de dimensie van de bijhorende code.

(Voorspelbaar) $k=n-m=2$ want woordlengte $n=5$ en aantal checkbits $m=3$ (aantal rijen van de checkmatrix H). Het getal k is ook het aantal rijen van de generator matrix G .

- 2) de informatiedichtheid van de code.

$$\text{Informatiedichtheid} = k/n = 0.40$$

- 3) de decodering van de ontvangen woorden uit onderdeel c), in zover je de fout(en) kon corrigeren. Alleen het eerste woord $\vec{w}=(1,1,0,0,1)$ kon worden gecorrigeerd: het gecorrigeerde codewoord is: $(1,1,1,0,1)$. De verstuurde informatie bestaat uit bits 4 en 5: $(0,1)$.

Normering:

1a:	3	2a:	4	3a:	5	4a:	3	5a:	3	MC:	15
1b:	2	2b:	3	3b:	5	4b:	2	5b:	2		
1c:	5	2c:	8	3c:	5	4c:	5	5c:	5		
1d:	5					4d:	5	5d:	5		
	15		15		15		15		15		15

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: Aantal punten = $15 - 3 \times$ aantal foute antwoorden

Het aantal te behalen punten (Som) is ≤ 90 . Voor het eindcijfer geldt:

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Som}}{9} + 1$$

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

6.1. Een graaf $G = (V, E)$ is een boom als

- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.
- o geen enkele component van G een cykel bevat.
- o G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.
- o G samenhangend is en elke lijn uit E een brug is. **Opl.: JA**

Toelichting:

In elke graaf bestaat tussen elke twee punten een kortste pad (exit optie 1). Optie 2 geeft niet weer dat een boom samenhangend moet zijn. Optie 3 is veel te algemeen: aan iedere graaf kun je eindpunten toevoegen.

6.2. Het Dijkstra algoritme is een algoritme dat

- o een minimale toewijzing bepaalt in een gewogen graaf.
- o een minimale padenboom bepaalt in een gewogen graaf. **Opl.: JA**
- o een maximale stroom bepaalt in een netwerk.
- o een minimale rondwandeling bepaalt in een afstandsgraaf.

Toelichting:

Het Dijkstra algoritme heeft niets te maken met rondwandelingen in een graaf (exit optie 4), met stromen in een netwerk (exit optie 3), of met toewijzingen in een gewogen graaf (exit optie 1).

6.3. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is

- o de uitstroom in een willekeurig punt (maar zeker niet p).
- o de uitstroom in de bron b . **Opl.: JA**
- o de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
- o de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p met een minteken voor pijlen die tegen het pad in gaan.

Toelichting:

Optie 1 is slecht gedefiniëerd: dit getal is niet constant voor alle punten. Optie 3 geeft wel een idee van "hoeveel stroom" er gaat door het netwerk, maar het is niet de parameter die we zoeken. Optie 4 is, net als optie 1, een gebrekkige definitie.

6.4. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd. **Opl.: JA**
- o het aantal volledige koppelingen (= kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.
- o het aantal verschillende mogelijkheden om de lijnen van de graaf netjes te kleuren.

Toelichting:

Optie 2 zinspeelt op de Stelling (13.27) van D. König, die enkel

geldig is voor reguliere tweedelingsgrafen. Opties 3 en 4 definiëren twee nogal oninteressante parameters, maar niet het lijnkleuringsgetal.

6.5. De genererende functie van een rij $(a_n)_n$ is

- o de algoritme waarmee de elementen a_n achtereenvolgens gegenereerd worden.
- o de formule die a_n direct weergeeft voor algemene n .
- o de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. **Opl.:** JA
- o de functie $f(n) = a_n$ voor n in $\mathbb{N}$, die de recurrente betrekking oplost.

Toelichting

Optie 1 is (een kromme omschrijving van) de recurrente betrekking. Opties 2 en 4 verwijzen naar de oplossing van de recurrente betrekking.

6.6. Er is maar één woordlengte n met $8 < n \leq 16$, waarvoor een perfect 1 fout verbeterende binaire code kan bestaan. Deze is:

- o Wordlengte $n = 16$.
- o Wordlengte $n = 15$. **Opl.:** JA
- o Wordlengte $n = 14$.
- o Wordlengte $n = 13$.

Toelichting:

Bij een perfect 1 fout verbeterende code vormen de bollen met straal 1 om codewoorden een partitie van de woordruimte. Bij een binaire code van woordlengte n heeft een bol met straal 1 altijd $n+1$ elementen. Dus moet $n+1$ een deler zijn van 2^n . Voor $8 < n \leq 16$ lukt dit enkel bij $n = 15$.