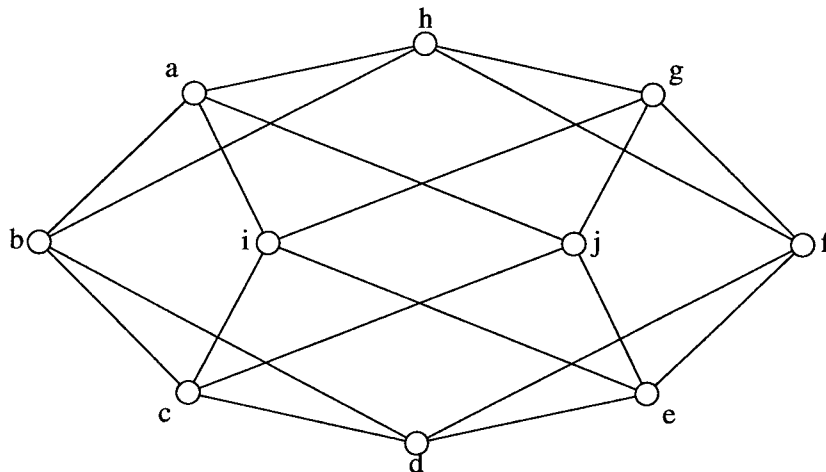


Discrete Wiskunde Tentamen 25-05-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het algoritme van Fleury

- a) Algemene kennis. In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.
- 1) Wat bedoelt men met een *gesloten Euler wandeling* in een graaf?
 - 2) Wat is een *brug* in een graaf?
 - 3) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler wandelingen in een graaf.
- b) Geef een korte beschrijving van de *Fleury algoritme* in een algemene Euler graaf (géén voorbeeld).
- c) Geef een Euler wandeling in de graaf uit volgende figuur (je mag de kopie bij het multiple choice formulier gebruiken). Het uiteindelijke antwoord moet een lijst van punten zijn in de volgorde van wandelen.



- d) Toon aan dat een samenhangende graaf met precies 2 onevengraadse punten een open Euler wandeling heeft met deze twee punten als eindpunten.

2. Koppelingen

- a) Algemene kennis. Gegeven is een (gewone, ongerichte) graaf $G := (V, E)$ en een koppeling F in G .
- 1) Wat is een *koppeling* in G ?
 - 2) Wat is een *maximum koppeling* in G ?
 - 3) Wat is een F -onverzadigd punt van de graaf G ?
 - 4) Wat is een F -vergroterend wisselpad van de graaf G ?
- b) Formuleer de *stelling van Berge-Petersen* over F -vergroterende wisselpaden.
- c) Twee spelers kiezen om beurt een punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk volgend punt zó gekozen te worden, dat het met een lijn verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen, verliest. Naargelang de eigenschappen van de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een strategie die winst verzekert. Leg deze strategieën uit, geef aan wanneer ze worden toegepast, en geef het verband met de stelling van Berge-Petersen aan.

3. Combinatoriek

- a) Laat $0 < k \leq n$ gehele getallen zijn. Op hoeveel verschillende manieren kunnen k personen op n stoelen plaatsnemen als
- 1) die stoelen op een rij staan.
 - 2) die stoelen in een kring staan.
- Geef telkens de redenering en de formule.
- b) Bepaal het aantal oplossingen van de ongelijkheid
- $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$$
- waarbij $x_1, \dots, x_4$ gehele getallen ≥ 0 voorstellen (redenering en formule volstaan).
- c) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal woorden van lengte n met twee symbolen a, b , waarin nooit twee b 's naast elkaar voorkomen. Geef de redenering; je hoeft de betrekking niet op te lossen.

4. Machtreeksen en Recurrente betrekkingen

- a) Algemene kennis.
- 1) Geef het klassieke binomium van Newton voor $(1+X)^n$, waar n een natuurlijk getal is. Gegeven $n=5$, bereken de coëfficiënt van X^3 .
 - 2) Zij α een reëel getal en $k > 0$ geheel. Geef een formule voor $\binom{\alpha}{k}$ voor $k \geq 0$.
 - 3) Geef het (veralgemeende) binomium van Newton voor $(1+X)^\alpha$, waarin de getallen uit a)2) optreden, en laat zien dat deze machtreeks overeenstemt met het klassieke binomium wanneer α geheel positief is.
- b) Laat zien dat voor iedere n geheel positief geldt:
- $$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} := \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$
- c) Toon aan dat
- $$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \cdot k} \cdot \binom{2k-2}{k-1}$$
- voor $k > 0$ geheel. Geef nu de machtreeks voor $\sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2}$.
- d) Bepaal met de resultaten uit (c) een oplossing voor de recurrente betrekking

$$a_{n+1} = 2 \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot a_{n-j} \quad (n \geq 0, a_0 = 1).$$

Geef de tussenstappen van je methode en de eindformule voor a_n duidelijk aan. Bereken aan de hand van deze formule de waarde van a_4 .

5. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat is de *Hamming afstand* tussen twee woorden van zelfde lengte n ?
 - 2) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding*?
 - 3) Wat bedoelt men met *3-fouten verbeterende code*?
- b) Hoe zie je aan de check matrix van een lineaire code dat je
- 1) Eén fout kan detecteren?
 - 2) Twee fouten kan corrigeren?
- c) We beschikken over de binaire (modulo twee) check matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal het syndroom en, indien mogelijk, het foute bit, bij de volgende ontvangen woorden:

(1, 1, 0, 0, 1) (1, 0, 1, 0, 0).

d) Geef een generator matrix G bij de check matrix uit deel c).

Bepaal nu

- 1) de dimensie van de bijhorende code.
- 2) de informatiedichtheid van de code.
- 3) de decoding van de ontvangen woorden uit onderdeel c), in zover je de fout(en) kon corrigeren.

Normering:

1a:	3	2a:	4	3a:	5	4a:	3	5a:	3	MC:	15
1b:	2	2b:	3	3b:	5	4b:	2	5b:	2		
1c:	5	2c:	8	3c:	5	4c:	5	5c:	5		
1d:	5					4d:	5	5d:	5		
	15		15		15		15		15		15

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: Aantal punten = 15 - 3* aantal foute antwoorden

Het totaal te behalen punten (*Som*) is 90. Voor het eindcijfer geldt:

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Som}}{9} + 1$$

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", folder "Hoofdtentamen DW") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Naam:

Studierichting en jaar:

25-05-04

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

6.1. Een graaf $G = (V, E)$ is een boom als

- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.
- o geen enkele komponent van G een cykel bevat.
- o G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.
- o G samenhangend is en elke lijn uit E een brug is.

6.2. Het Dijkstra algoritme is een algoritme dat

- o een minimale toewijzing bepaalt in een gewogen graaf.
- o een minimale padenboom bepaalt in een gewogen graaf.
- o een maximale stroom bepaalt in een netwerk.
- o een minimale rondwandeling bepaalt in een afstandsgraaf.

6.3. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is

- o de uitstroom in een willekeurig punt (maar niet p).
- o de uitstroom in de bron b .
- o de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
- o de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p met een minteken voor pijlen die tegen het pad in gaan.

6.4. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

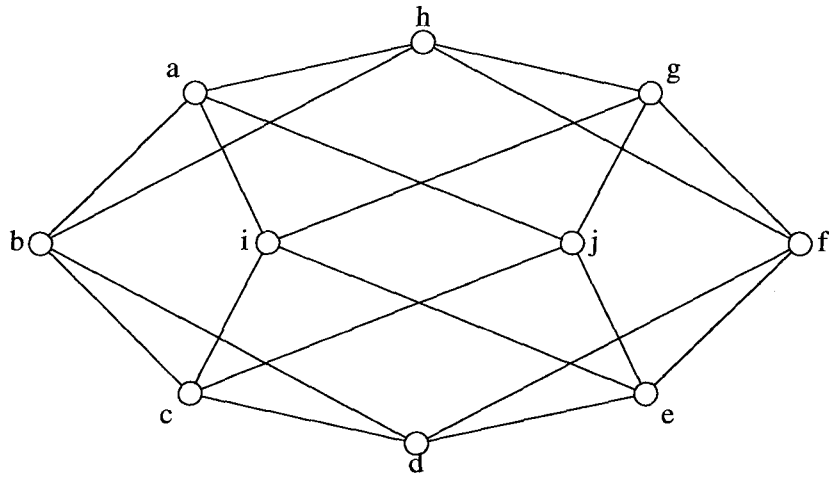
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het aantal volledige koppelingen (= kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.
- o het aantal verschillende mogelijkheden om de lijnen van de graaf netjes te kleuren.

6.5. De genererende functie van een rij $(a_n)_n$ is

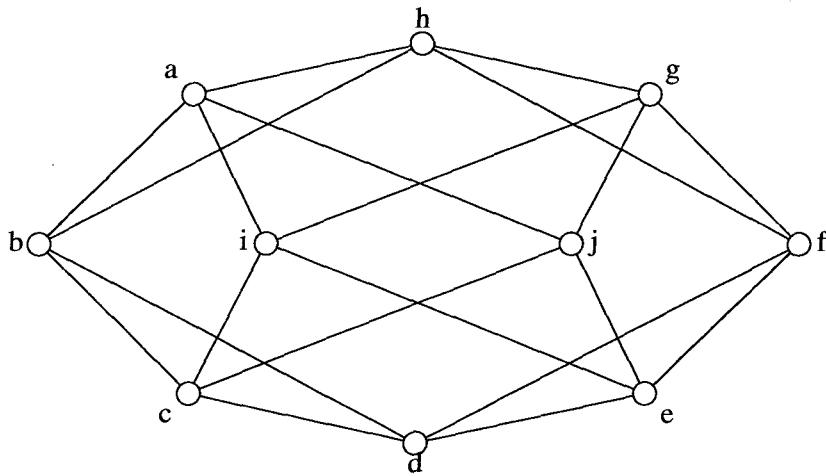
- o de algoritme waarmee de elementen a_n achtereenvolgens gegenereerd worden.
- o de formule die a_n direct weergeeft voor algemene n .
- o de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- o de functie $f(n) = a_n$ voor n in $\mathbb{N}$, die de recurrente betrekking oplost.

6.6. Er is maar één woordlengte n met $8 < n \leq 16$, waarvoor een perfect 1 fout verbeterende binaire code kan bestaan. Deze is:

- o Woordlengte $n = 16$.
- o Woordlengte $n = 15$.
- o Woordlengte $n = 14$.
- o Woordlengte $n = 13$.



Figuur: de graaf bij vraag 1c



Figuur: de graaf bij vraag 1c