

Discrete Wiskunde Voortentamen 22-03-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Dominostenen en de Euler stelling

Op een k -dominosteen staan twee al dan niet verschillende getallen $0, 1, \dots, k$. Een volledige set k -dominostenen bevat elke (herhalings)combinatie van twee getallen precies één keer. Het is de bedoeling stenen in een kring aan mekaar te leggen, zó dat op de aangrenzende velden van twee stenen hetzelfde getal staat.

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is een *Euler toer* in een graaf?

Een Euler toer in een graaf is een gesloten wandeling die elke lijn van de graaf precies één keer doorloopt.

(ii) Wat is de *graad van een punt* in een graaf?

De graad van een punt in een graaf is het aantal lijnen van de graaf incident met dat punt.

(iii) In een graaf is het aantal onevengraadse punten altijd even. Leg uit waarom.

De som van de graden is tweemaal het aantal lijnen, en dat is een even getal.

(b) Geef een grafentheoretisch model van een set k -dominostenen.

Neem de volledige graaf op $k+1$ punten $0, 1, \dots, k$ met een lus in elk punt. Een lijn ij met $i \neq j$ stelt de steen voor met de getallen i en j . Een lus in i stelt de steen voor met tweemaal het getal i .

(c) Formuleer de stelling van Euler over het bestaan van bepaalde gesloten wandelingen in een graaf G .

Er is een Euler toer enkel en alleen als de graaf evengraads en samenhangend is. "Evengraads" betekent dat ieder punt een even graad heeft.

(d) Bij welke waarden van k bestaat er een gesloten kring van k -dominostenen die alle stenen gebruikt? Geef toelichting op basis van onderdelen (b) en (c).

Er is een gesloten kring voor even k . De lussen (dubbelstenen) zijn daarbij niet relevant: de dominosteen met tweemaal het getal i kan later in de kring worden gelegd op een plaats waar twee stenen aan elkaar gelegd zijn met het getal i . Dit geeft de graaf K_{k+1} , die zeker samenhangend is, en die evengraads is precies dan als k even is (elk punt heeft graad $(k+1)-1$). Het resultaat volgt uit de Euler stelling.

2. Het Prim Algoritme

(a) Algemene kennis.

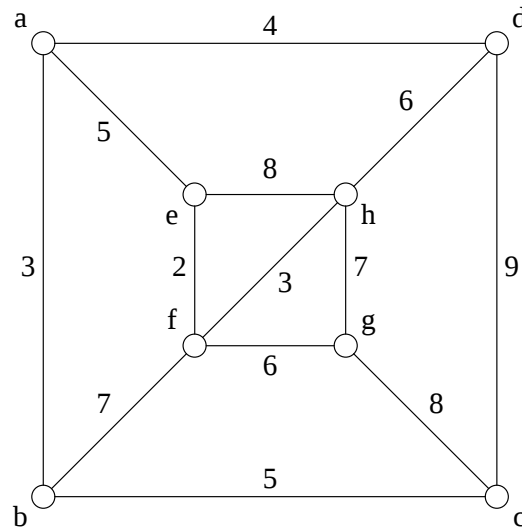
(i) Wat is een *opspannende boom* in een graaf?

een deelgraaf met dezelfde punten als de gegeven graaf ("opspannend"), en deze deelgraaf is bovendien een boom.

(ii) Welke voorwaarde(n) zijn nodig en voldoende voor een graaf om een opspannende boom te bezitten?

Nodige en voldoende voorwaarde is: samenhangend.

- (b) Beschrijf het *algoritme van Prim* voor het vinden van een minimale opspannende boom in een gewogen graaf (met geschikte eigenschappen).
- * beginboom T : kies 1 punt van de graaf.
 - * Herhaal zolang de boom T niet opspannend is:
 - * zoek een lijn van minimaal gewicht tussen een punt van de boom en een punt daarbuiten
 - * voeg die lijn en het andere eindpunt toe aan T .
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. (N.B.: De figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.)



Figuur bij Opgave 2: het Prim Algoritme

De boom "groeit" als volgt. Begin met a . Voeg toe (in de aangegeven volgorde, met de aangegeven gewichten): ab (3), ad (4), ae (5), ef (2), fh (3), bc (5), fg (6).
 Het totale gewicht van de eindboom is:
 $ab+ad+ae+ef+fh+bc+fg=3+5+2+3+4+5+6=28$

3. Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met een *overdekking* in een graaf?

Een overdekking in een graaf is een deelcollectie punten zó dat iedere lijn incident is met een punt uit de collectie.

(ii) Wat zegt de *stelling van König en Egerváry* in verband met overdekkingen en toewijzingen?

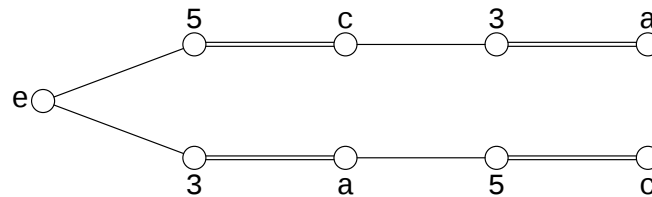
In een tweedelingsgraaf is de minimumgrootte van een overdekking gelijk aan de maximum grootte van een toewijzing.

(b) Gegeven is volgende toewijzing in een tweedelingsgraaf G :

$$F := \{a-3, b-1, c-5, d-4\}.$$

(N.B.: Onderstaande figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.) Controleer methodisch dat dit een maximum toewijzing is in G . Geef voldoende details.

De Hongaarse methode. Het enige onverzadigde punt in $\{a, b, c, d, e\}$ is e . De wisselboom in e is:

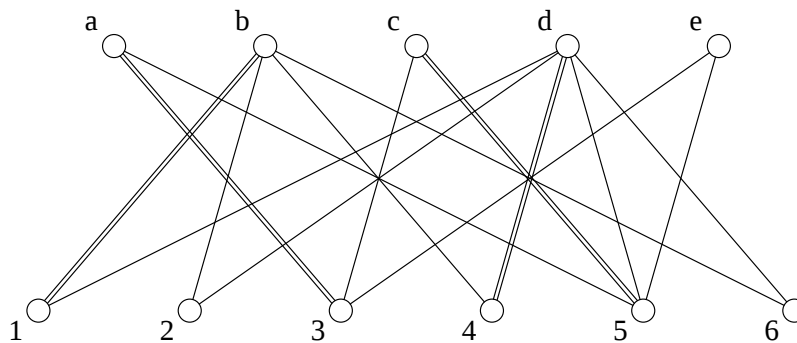


Alle eindpunten van de boom zijn F -verzadigd. De koppeling kan niet verder worden vergroot.

- (c) Construeer met de resultaten uit deel (b) een minimale overdekking in G . Geef voldoende details van je constructie(s).

Volgens recept: bepaal een "flessenhals" $W^* \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ en neem als overdekking $U := \{a, b, c, d, e\} \setminus W^* \cup B(W^*)$. Hier: $W^* := \{a, c, e\}$ en $B(W^*) := \{3, 5\}$. Dit zijn de punten die optreden in de zoekboom. Dit geeft $U := \{b, d, 3, 5\}$.

Merk op dat de grootte van deze minimum overdekking gelijk is aan de grootte van de maximumtoewijzing (nl., 4), zoals voorspeld door de stelling van König-Egerváry.



Figuur bij Opgave 3: Overdekkingen en Optimale toewijzingen

- (d) Zoek in volgende kostenmatrix methodisch naar een minimale toewijzing. Geef de gevonden toewijzing en haar gewicht.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 10 & 12 & 9 \\ 8 & 7 & 13 & 16 & 12 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 15 \\ 10 & 4 & 7 & 13 & 11 \\ 12 & 9 & 10 & 14 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 \downarrow \\
 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Er is een (unieke) nultoewijzing: posities $(2,1), (4,2), (5,3), (3,4), (1,5)$. Dit geeft als optimale toewijzing het totaalbedrag $8+4+10+13+9=44$.

Normering:

1a:	6	2a:	4	3a:	4	MC:	28
b:	6	b:	6	b:	5		
c:	4	c:	10	c:	5		
d:	6			d:	8		
22		20		22		26	

(Multiplechoice: -4 ptn per fout)

Totaal = 90. Cijfer = Totaal/10 + 1.

4. Multiple-choice gedeelte

- **Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.**
- **In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.**

4.1. Een brug in een graaf is gedefinieerd als:

- o een lijn die andere lijnen van de graaf kruist.
- o een lijn die bij wegname een on samenhangende restgraaf oplevert.
- o een lijn die bij wegname een restgraaf oplevert met meer componenten dan de oorspronkelijke graaf.

Opl.: JA

- o een lijn van een opspannende boom.

Optie 1 is onzin. Optie 2 is te beperkt. Optie 4 is op zich wel waar, maar het is een erg speciaal geval van bruggen (en zeker niet de definitie van "brug").

4.2. Een graaf $G = (V, E)$ is een Hamilton graaf als G

- o een cykel bevat die elk punt van V één keer aandoet. **Opl.: JA**
- o een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
- o een pad bevat dat elk punt van V één keer aandoet.
- o een pad bevat dat elke lijn van E één keer aandoet.

De Hamilton problematiek gaat over rondwandelingen (exit opties 3 en 4) in een graaf. Optie 2 is erg beperkt: een graaf die hieraan voldoet, moet zelf een cykel zijn.

4.3. Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf

- o een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
- o een opspannende kortste-paden boom te vinden.
- o een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht. **Opl.: JA**
- o een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.

Het handelsreizigers probleem gaat over rondwandelingen (exit opties 1 en 2) in een gewogen graaf. Optie 4 is het optimale toewijzings probleem (hfdstuk 6).

4.4. In een boom heeft elk punt één of meer takken, en elk van deze takken heeft een bepaald gewicht en een bepaalde lengte. De scores van de diverse punten kunnen worden vergeleken. Onder een centraal punt (punt van het centrum) verstaat men:

- o Een punt met de lichtste zwaarste tak.
- o Een punt met de langste zwaarste tak.
- o Een punt met de zwaarste langste tak.
- o Een punt met de kortste langste tak. **Opl.: JA**

Opties 2 en 3 halen de metingen van lengte en gewicht door elkaar. Optie 1 beschrijft een centroidaal punt.

- 4.5. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
 - o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede. **Opl.:** JA
 - o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
 - o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel netto stroom gaat.

Opties 3 en 4 zijn waar voor elke stroom (3: volgens definitie van stroom, 4: volgens een andere stelling). Optie 1 is onzin.

4.6. De stelling van Berge-Petersen zegt:

- o Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat. **Opl.:** JA
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

Optie 1 is de definitie van "volledig". In optie 2 is het woord "volledig" onterecht. Optie 4 is een andere stelling.

4.7. De Hongaarse methode betreft de constructie van

- o een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf. **Opl.:** JA
- o een latijns vierkant uit een latijnse rechthoek.
- o een wisselboom in een tweedelingsgraaf met toewijzing.
- o een maximum stroom in een netwerk.

Optie 2 heeft te maken met een andere stelling van König over het opdelen van een tweedelingsgraaf in volledige koppelingen. Optie 3 beschrijft enkel een stap uit het algoritme "Hongaarse methode".

Optie 4 is het verwante "label algoritme".