



Discrete Wiskunde Voortentamen 22-03-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Dominostenen en de Euler stelling

Op een k -dominosteen staan twee al dan niet verschillende getallen $0, 1, \dots, k$. Een volledige set k -dominostenen bevat elke (herhalings)combinatie van twee getallen precies één keer. Het is de bedoeling stenen in een kring aan mekaar te leggen, zó dat op de aangrenzende velden van twee stenen hetzelfde getal staat.

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is een *Euler toer* in een graaf?

(ii) Wat is de *graad van een punt* in een graaf?

(iii) In een graaf is het aantal onevengraadse punten altijd even. Leg uit waarom.

(b) Geef een grafentheoretisch model van een set k -dominostenen.

(c) Formuleer de stelling van Euler over het bestaan van bepaalde gesloten wandelingen in een graaf G .

(d) Bij welke waarden van k bestaat er een gesloten kring van k -dominostenen die alle stenen gebruikt? Geef toelichting op basis van onderdelen (b) en (c).

2. Het Prim Algoritme

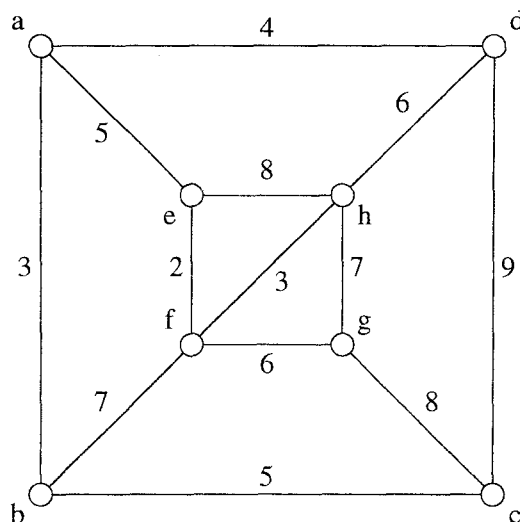
(a) Algemene kennis.

(i) Wat is een *opspannende boom* in een graaf?

(ii) Welke voorwaarde(n) zijn nodig en voldoende voor een graaf om een opspannende boom te bezitten?

(b) Beschrijf het *algoritme van Prim* voor het vinden van een minimale opspannende boom in een gewogen graaf (met geschikte eigenschappen).

(c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. (N.B.: De figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.)



Figuur bij Opgave 2: het Prim Algoritme

3. Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met een *overdekking* in een graaf?

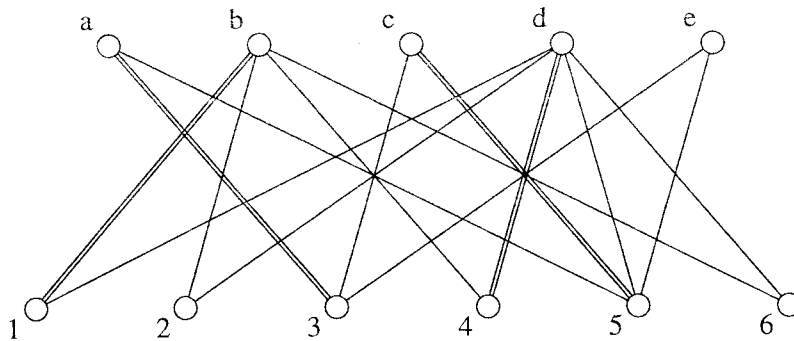
(ii) Wat zegt de *stelling van König en Egerváry* in verband met overdekkingen en toewijzingen?

(b) Gegeven is volgende toewijzing in een tweedelingsgraaf G :

$$F := \{a-3, b-1, c-5, d-4\}.$$

(N.B.: Onderstaande figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.) Controleer methodisch dat dit een maximum toewijzing is in G . Geef voldoende details.

(c) Construeer met de resultaten uit deel (b) een minimale overdekking in G . Geef voldoende details van je constructie(s).



Figuur bij Opgave 3: Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(d) Zoek in volgende kostenmatrix methodisch naar een minimale toewijzing. Geef de gevonden toewijzing en haar gewicht.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 10 & 12 & 9 \\ 8 & 7 & 13 & 16 & 12 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 15 \\ 10 & 4 & 7 & 13 & 11 \\ 12 & 9 & 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Normering:

1a:	6	2a:	4	3a:	4	MC:	28
b:	6	b:	6	b:	5		
c:	4	c:	10	c:	5		
d:	6			d:	8		
22		20		22			26

(Multiplechoice: -4 ptn per fout)

Totaal = 90. Cijfer = Totaal/10 + 1.

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Discrete Wiskunde, knop "Course Information", folder "Voortentamen") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Naam:

Studierichting en jaar:

22-03-04

4. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

4.1. Een brug in een graaf is gedefiniëerd als:

- o een lijn die andere lijnen van de graaf kruist.
- o een lijn die bij wegname een onsamenvhangende restgraaf oplevert.
- o een lijn die bij wegname een restgraaf oplevert met meer componenten dan de oorspronkelijke graaf.
- o een lijn van een opspannende boom.

4.2. Een graaf $G = (V, E)$ is een Hamilton graaf als G

- o een cykel bevat die elk punt van V één keer aandoet.
- o een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
- o een pad bevat dat elk punt van V één keer aandoet.
- o een pad bevat dat elke lijn van E één keer aandoet.

4.3. Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf

- o een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
- o een opspannende kortste-paden boom te vinden.
- o een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
- o een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.

4.4. In een boom heeft elk punt één of meer takken, en elk van deze takken heeft een bepaald gewicht en een bepaalde lengte. De scores van de diverse punten kunnen worden vergeleken. Onder een centraal punt (punt van het centrum) verstaat men:

- o Een punt met de lichtste zwaarste tak.
- o Een punt met de langste zwaarste tak.
- o Een punt met de zwaarste langste tak.
- o Een punt met de kortste langste tak.

4.5. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

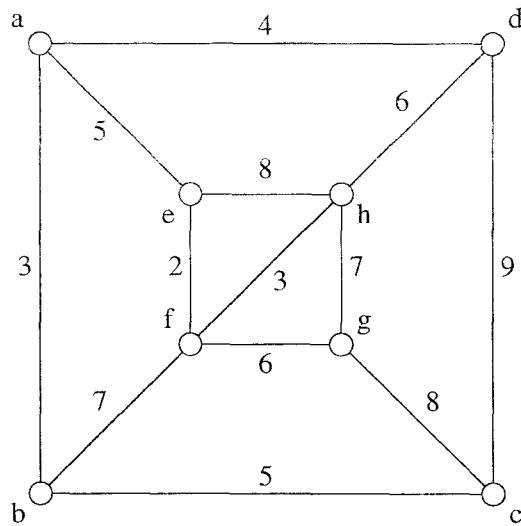
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel netto stroom gaat.

4.6. De stelling van Berge-Petersen zegt:

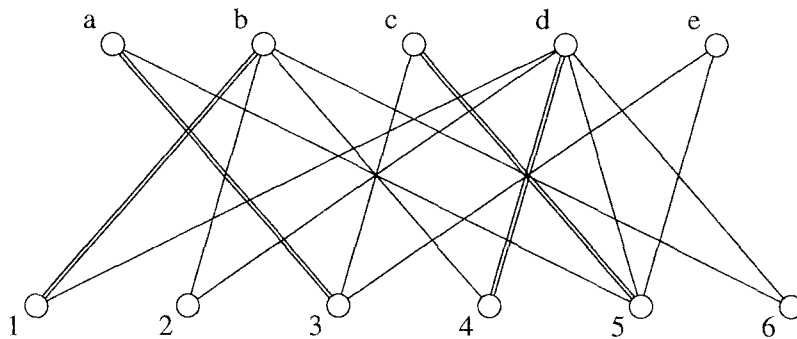
- o Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

- 4.7. De Hongaarse methode betreft de constructie van
- o een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf.
 - o een latijns vierkant uit een latijnse rechthoek.
 - o een wisselboom in een tweedelingsgraaf met toewijzing.
 - o een maximum stroom in een netwerk.

Werkfiguren bij opgaven 2 en 3



Figuur bij Opgave 2: het Prim Algoritme



Figuur bij Opgave 3: Overdekkingen en Optimale toewijzingen