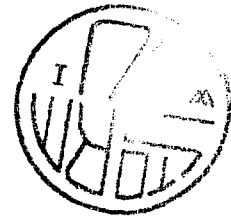


Discrete Wiskunde Tentamen 29-08-03



Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

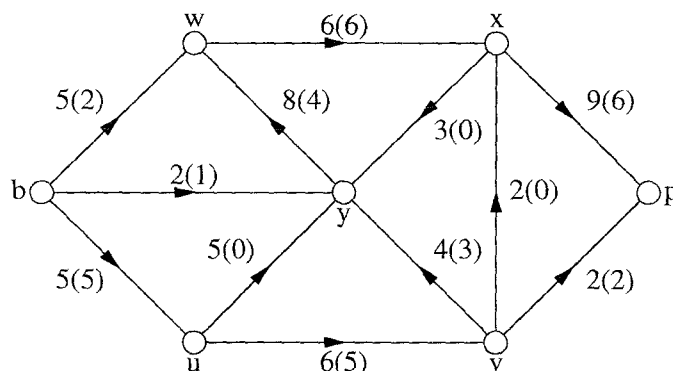
1. Het Handelsreizigersprobleem

- (a) Algemene kennis: Geef de definitie van
- (i) een *gewogen graaf*,
 - (ii) een *afstandsgraaf* bij een gewogen samenhangende graaf, en
 - (iii) het *Handelsreizigersprobleem* in een gewogen graaf.
- (b) Er is een algoritme waarmee men het Handelsreizigersprobleem in een volledige gewogen graaf of in een afstandsgraaf bij benadering kan oplossen. In de basisstap van deze algoritme wordt geprobeerd een Hamilton cykel te verbeteren. Leg uit hoe deze stap werkt.

- (c)
- | | A | B | C | D | E | |
|---|---|----|---|---|----|--|
| A | 0 | 7 | 5 | 4 | 6 | Ga uit van de hiernaast gegeven gewichtenmatrix en van de cykel $A B C D E A$. Zoek met de algoritme uit b) naar een verbetering van de cykel, net zo lang tot de methode geen verbetering meer oplevert. Geef de gevonden cykel en zijn gewicht. |
| B | 7 | 0 | 8 | 3 | 10 | |
| C | 5 | 8 | 0 | 9 | 2 | |
| D | 4 | 3 | 9 | 0 | 9 | |
| E | 6 | 10 | 2 | 9 | 0 | |

2. Stromen in netwerken

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat is de *stroomsterkte* van een stroom in een netwerk?
 - (ii) Wat is een *snede* tussen bron en put?
 - (iii) Wat verstaat men onder de *capaciteit* van een snede en onder *stroom* over een snede?
- (b) Formuleer de Stelling van Ford en Fulkerson over maximum stromen in een netwerk.
- (c) Formuleer de geheeltallige maximum-stroom stelling.
- (d) Verhoog (indien mogelijk) met het labelalgoritme de stroom in volgend netwerk tot een maximum stroom. Geef de bijhorende maximum stroomsterkte en beschrijf de minimum snede.



Figuur: netwerk met stroom

Twee werkkopiën van deze figuur vind je achter de multiple choice vragen. Je kan deze gebruiken voor je antwoord.

3. Tellen

- (a) Algemene kennis.
- (i) Je wil k dingen kiezen uit n zonder volgorde en zonder herhaling. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor dit aantal?
 - (ii) Je wil k dingen kiezen uit n met volgorde en met herhaling toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor dit aantal?
- (b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}$$

- (c) Vijf studenten behalen een (geheeltallige) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

4. Recurrente betrekkingen en genererende functies

- (a) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal mogelijkheden a_n om een rij van n bits te maken waarin geen twee nullen na elkaar optreden.
- (b) Los de recurrente betrekking $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$ op onder de beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = -5/2$.
- (c) We verdelen rode en blauwe knikkers over vier verschillende bakjes, en wel zo dat elk bakje tenminste één rode knikker bevat en een even aantal blauwe knikkers. Op de kleur na zijn de knikkers eender. Bepaal de genererende funktie voor dit probleem, en bepaal hiermee het aantal oplossingen als er 7 knikkers verdeeld zijn.

5. Een perfecte code

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat is een *lineaire code* en wat bedoelt men met de *informatiedichtheid* van een lineaire code?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *e fouten detecterende code*?
 - (iii) En met een *e fouten verbeterende code*?
 - (iv) Wat bedoelt men met een *perfect e fouten verbeterende code*?
- (b) De "Hamming 15-11 code C" is een lineaire code met woordlengte 15 en informatiedichtheid 11/15. Deze code is 1 fout verbeterend. Antwoord op basis van deze gegevens:
- (i) Hoeveel woorden bevat de woordruimte?
 - (i) Hoeveel codewoorden zijn er?
- (c) (vervolg (b) onderdeel) Hoeveel woorden bevat een bol met straal 1 in deze woordruimte?
- d) (vervolg (b) onderdeel) Leg uit op basis van de gegeven en gevonden informatie waarom de code C perfect moet zijn.

NORMERING:

1a: 3	2a: 3	3a: 4	4a: 4	5a: 4	MC: 16
1b: 4	2b: 3	3b: 6	4b: 5	5b: 3	
1c: 7	2c: 3	3c: 6	4c: 5	5c: 3	
: 14	2d: 6	: 16	14	5d: 5	15
					16

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per foute antwoord.

$$\text{TOTAAL} = 90, \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$

Na afloop van dit tentamen vind je een (min of meer) uitgewerkte versie van het tentamen op teletop. Zie bij "rooster", onderaan. Dit is slechts tot 31 augustus, want teletop wordt opgedoekt ten gunste van blackboard.

Naam:

Studierichting en jaar:

29-08-03

6. Multiple choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6.1. De Hongaarse methode betreft de konstruktie van

- o een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf
- o een latijns vierkant uit een latijnse rechthoek
- o een maximale wisselboom in een tweedelingsgraaf
- o een maximum stroom in een netwerk.

6.2. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf kunnen worden gekleurd zó dat elke kleur in elk punt komt.
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het aantal volledige koppelingen (= kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
- o het maximum aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.

6.3. Het totale burentekort in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ is

- o De som van alle verschillen $\#W - \#Buren\ van\ W$ voor W een deelverzameling van V_1 .
- o het grootste verschil $\#W - \#Buren\ van\ W$ voor W een deelverzameling van V_1 , of 0 als dit grootste verschil negatief is.
- o $\#W$, waar $W \subseteq V_1$ de verzameling van alle punten zonder burenen is.
- o $\#W$, waar $W \subseteq V_2$ de verzameling van alle punten is die niet in een maximum toewijzing betrokken zijn.

6.4. De genererende functie van een rij $(a_n)_n$ is

- o De algoritme waarmee de elementen a_n achtereenvolgens gegenereerd worden.
- o de formule waarmee de recurrente betrekking wordt beschreven.
- o de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.
- o De functie $f(n) = a_n$ voor n in $\mathbb{N}$ die de recurrente betrekking oplost.

6.5. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met k kralen waarbij n gegeven kleuren kunnen optreden. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een k -kombinatie van n elementen?
- o Een k -herhalingskombinatie van n elementen?
- o Een k -rangschikking van n elementen?
- o Een k -herhalingsrangschikking van n elementen? OO JA
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.6. De machtreeks van $\frac{1}{(1+X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze deling kan niet worden uitgevoerd.

