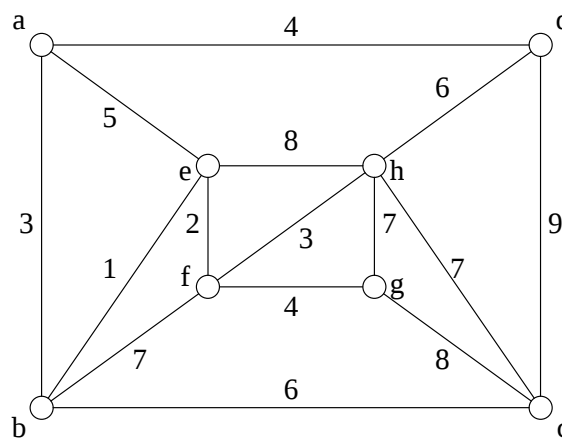


Discrete Wiskunde Tentamen 28-05-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. De Prim Algoritme

- (a) Algemene kennis: Geef de definitie van
- (i) een *boom*,
Samenhangende graaf zonder cykels.
 - (ii) een *opspannende boom* in een graaf, en
Een deelgraaf die alle punten van de gegeven graaf bevat, en die tevens een boom is.
 - (iii) een *minimale opspannende boom* in een gewogen graaf.
Een opspannende boom waarvan het gewicht (de som van de lijngewichten van lijnen in de boom) het kleinste is onder alle mogelijke opspannende bomen.
- (b) Beschrijf de algoritme van Prim voor het vinden van een minimale opspannende boom in een samenhangende gewogen graaf.
Beginboom: een willekeurig punt. Herhaal: zolang de voorlopige boom niet alle punten bevat, kies een overstekende lijn van minimaal gewicht, en voeg deze lijn met haar eindpunt toe aan de boom.
N.B.: Met "overstekende lijn" wordt bedoeld een lijn die een punt van de boom verbindt met een punt buiten de boom.
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. (De figuur is overgenomen op het multiple-choice blad.)



Figuur: gewogen graaf

Oplossing:

$ab+be+ef+fh+ad+fg+bc=3+1+2+3+4+4+6=23$. De sommatie gaat in volgorde van toevoegen aan de Prim-boom.

2. Toernooien

(a) Algemene kennis: leg uit:

- (i) een *Hamilton pad* in een graaf.
- (ii) een *gericht Hamilton pad* in een gerichte graaf.
- (iii) een *toernooigraaf*.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	0

(b) Beschrijf het algoritme waarmee je een gericht pad in een toernooigraaf kunt uitbreiden tot een gericht pad met één punt meer.

(c) Construeer, volgens deze algoritme en mét toelichting, een Hamilton pad in de gerichte graaf, voorgesteld door de gegeven bindingsmatrix.

Bij (b): begin met het eerste het beste gerichte pad wat je vind, en herhaal steeds deze procedure:

- * neem het eerste punt dat nog niet in het pad zit.
- * bekijk de pijlen van dit punt naar het pad of omgekeerd: kan het punt voorin het pad? kan het punt achteraan het pad? als geen van beide kunnen, zoek je naar een "omslag" van de pijlen: een pijl van een punt x op het pad naar het extra punt, en een pijl van het extra punt naar het punt op het pad dat volgt op x. tot er geen ongebruikt punt meer is.

Bij (c):

Een snel gevonden pad: A->B->D.

Eerste ongebruikte punt: C. Kan voorin: C->A->B->D.

Eerste ongebruikte punt: E. Omslag: C->E en E->A. Pad C->E->A->B->D.

Eerste ongebruikte punt: F. Omslag: B->F en F->D. Pad C->E->A->B->F->D.

(d) Wat is een gerichte Hamiltongraaf? Laat zien dat de graaf uit deze opgave geen gerichte Hamiltongraaf is.

Een gerichte Hamilton graaf is een gerichte graaf met een gerichte Hamilton toer (dat wil zeggen: een gerichte gesloten wandeling die door elk punt precies één keer komt). Je gaat elk punt dus een keer in en een keer uit. Let eens op het punt D: er zijn geen uitgaande pijlen.

3. Combinatoriek en recurrente betrekkingen

(a) Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende eigenschap:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

(b) Los volgende recurrente betrekking op onder de gegeven beginvoorwaarden:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4)$$

homogene oplossing: k.v. is $r^2 - 9 = 0$ dus $r = \pm 3$ en $a_n^{(h)} = k_1 3^n + k_2 (-3)^n$.

particuliere oplossing: Voorstel is $a_n^{(p)} = l \cdot n \cdot 3^n$ want een van de wortels van de k.v. is ook grondtal van het rechterlid. Invullen in de k.v. geeft: $1 \cdot n \cdot 3^n - 9 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot 3^{n-2} = 8 \cdot 3^n$. Hieruit volgt $l = 4$ en

dus $a_n^{(p)} = 4n \cdot 3^n$.

algemene oplossing: $a_n^{(h)} = k_1 3^n + k_2 (-3)^n + 4n \cdot 3^n$.

beginvoorwaarden:

$$a_0 = k_1 + k_2 = 9/4 \quad (1)$$

$$a_1 = 3k_1 - 3k_2 + 12 = 3/4 \quad \text{dus } k_1 - k_2 + 4 = 1/4 \quad (2).$$

$$(1) + (2) \text{ geeft } 2k_1 + 4 = 10/4 \text{ en } k_1 = -3/4.$$

$$\text{In (1): } k_2 = 9/4 + 3/4 = 3.$$

De oplossing is:

$$a_n = \frac{-3}{4} 3^n + 3 \cdot (-3)^n + 4n \cdot 3^n = \left(\frac{-3}{4} + (-1)^n \cdot 3 + 4n \right) 3^n.$$

- (c) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

Kies een leeg hok (h keuzes).

Plaats 1 konijn in elk overgebleven hok (1 keuze).

Verdeel de $k-h+1$ overige konijnen willekeurig over de $h-1$ niet-lege hokken

$$\left(\binom{(h-1) + (k-h+1) - 1}{k-h+1} \right) = \binom{k-1}{k-h+1} \text{ keuzes}.$$

Als je dit keuzeproces in een telboom onderbrengt,

$$\text{kom je op een totaal van } h \cdot \binom{k-1}{k-h+1} \text{ keuzes.}$$

Neem nu aan: $k=7$ en $h=4$.

De formule geeft $4 \cdot \binom{6}{4}$, dat geeft $4 \cdot 15 = 60$ keuzes.

- (d) Wat is de coëfficiënt van x^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k \right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

Je kan de reeks tussen de haken schrijven als $X/(1-X)$. De derde macht is $X^3/(1-X)^3$. De formule hiervoor is

$$X^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} X^k.$$

De coëfficiënt van de tiende macht hoort bij de zevende machts term van de sommatie:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

Voor een "handmatige" berekening moet je tellen op hoeveel manieren je een term $X^i \cdot X^j \cdot X^k$ kunt maken met $i, j, k \geq 1$ en $i+j+k=10$. Daarbij komt X_i uit de machtreeks in de eerste factor van de derde macht, X_j uit de tweede factor, en X^k uit de derde. Dit is het "eendere knikkers in drie bakjes" probleem, waarbij in elk bakje alvast 1 knikker moet. De resterende zeven knikkers kun je vrij uitstrooien, en dat kan inderdaad op $\binom{3+7-1}{7}$ manieren.

4. Het principe van Möbius inversie.

(a) Algemene kennis.

(i) Geef de waarde van de Möbius functie in volgende gevallen:

$$\mu(3), \mu(6), \mu(9), \mu(30).$$

$$\mu(3)=-1, \mu(6)=1, \mu(9)=0, \mu(30)=-1.$$

(ii) Gegeven is een geheel getal $n > 1$. We willen de getallen $\mu(d)$ optellen voor alle positieve delers d van n . Wat is de uitkomst?

Altijd 0. Dat kun je vermoeden als je enkele simpele tests maakt, bijvoorbeeld:

$$n=2: \mu(1)+\mu(2)=1-1=0.$$

$$n=4: \mu(1)+\mu(2)+\mu(4)=1-1+0=0.$$

$$n=6: \mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(6)=1-1-1+1=0.$$

$$n=8: \mu(1)+\mu(2)+\mu(4)+\mu(8)=1-1+0+0=0.$$

$$n=9: \mu(1)+\mu(3)+\mu(9)=1-1+0=0.$$

(iii) Gegeven zijn twee functies $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Daarbij staat $d|n$ voor " d deelt n ". Het Möbius inversie principe zegt dat je nu $g(n)$ kunt oplossen voor alle $n \in \mathbb{N}$. Geef de formule (je hoeft deze niet te bewijzen).

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(n/d) \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) We kijken naar open of gesloten kettingen van lengte l , waarbij kralen van k verschillende kleuren zijn toegestaan; de kralen zijn verder eender. Het aantal gesloten kettingen van lengte l noemen we $G(l)$. Leg bondig uit hoe je aan volgende twee gelijkheden komt:

$$(i) \quad G(l) = \sum_{d|l} M(d)$$

$$(ii) \quad k^l = \sum_{d|l} d \cdot M(d).$$

Leg ook uit waar het getal $M(d)$ voor staat.

In een correct antwoord moeten volgende ingrediënten op een of andere manier voorkomen.

$M(d)$ is het aantal cyclisch verschillende patronen zonder deelpatroon.

De lengte d van een patroon moet de lengte l van de gesloten ketting delen. Met elk van deze patronen kun je één gesloten ketting maken. Cyclisch gelijke patronen geven dezelfde gesloten ketting, en worden vermeden. Een patroon met een deelpatroon geeft een ketting die al elders wordt geteld, en wordt vermeden. Dit verklaart formule (i).

Formule (ii) geeft het aantal open kettingen (k^l) uitgeplitst naar cyclisch verschillende patronen zonder deelpatroon. Een patroon van lengte d hoort tot een setje van d cyclisch gelijke patronen, die samen d verschillende open kettingen geven. Omdat er geen deelpatronen zijn die al elders worden geteld, zijn er geen dubbel-tellingen. Dit verklaart formule (ii).

(c) Pas het principe van Möbius inversie nu toe om een formule voor $M(d)$ te vinden. Bereken hiermee $M(6)$ bij $k=3$ kleuren.

We gebruiken formule (ii) uit onderdeel (b) met $f(n)=k^n$ (bekijk k als een vooraf gegeven aantal, n is de lopende parameter) en

$g(d)=d \cdot M(d)$. Dit geeft $g(n)=\sum_{d|n} \mu(d) \cdot k^{n/d}$ en dus $M(n)=(1/n) \cdot \sum_{d|n} \mu(d) \cdot k^{n/d}$.

Voor $n=6$ en $k=3$ kleuren vinden we: $M(6)=(1/6) \cdot \sum_{d|6} \mu(d) \cdot 3^{6/d}$. Dat geeft volgende sommatie:

$$\begin{aligned} & (1/6) \{ \mu(1) \cdot 3^{6/1} + \mu(2) \cdot 3^{6/2} + \mu(3) \cdot 3^{6/3} + \mu(6) \cdot 3^{6/6} \} = \\ & (1/6) \{ 1 \cdot 3^6 - 1 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 \} = \\ & (1/6) \{ 729 - 27 - 9 + 3 \} = 696/6 = 116. \end{aligned}$$

5. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis: leg uit:

1) *minimum afstand* van een code.

Kleinst mogelijke afstand tussen twee verschillende codewoorden.

2) *twee fouten verbeterende code*.

Wanneer een woord toekomt met ten hoogste twee fouten, dan is maximum likelihood decoding mogelijk en geeft de juiste correctie.

3) *check matrix* van een lineaire code.

De matrix die hoort bij de checkvergelijkingen van de code.

(b) Gegeven zijn volgende check vergelijkingen voor een lineaire binaire code.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 0$$

Geef de bijhorende checkmatrix H . Hoeveel fouten kan de bijhorende code detecteren/corrigeren? Goede toelichting scoort.

De checkmatrix is

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het formaat van een codevector is $(a, b, c, d, a+b+c, a+b+d, a+c+d)$.

Elke wijziging van a , b , of c veroorzaakt minimaal 3 wijzigingen in dit formaat (hiervoor moet je even puzzelen met gevalletjes).

Via de theorie gaat het zo: de minimumafstand δ is ≥ 3 , want elke twee kolommen zijn lineair onafhankelijk. Maar δ is niet ≥ 4 , want de drie kolommen 1,2,6 zijn niet lineair onafhankelijk (som is nulvector).

Uit de minimum afstand haal je de capaciteiten van de code:

foutdetectie: tot 2 fouten.

foutcorrectie: 1 fout.

(c) Geef een generator matrix G bij de check matrix uit deel (b). Wat is de dimensie en de informatiedichtheid van de bijhorende code?

De generatormatrix is

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De code is van dimensie 4, de informatiedichtheid is $4/7$.

(d) Coderen en decoderen.

(i) Codeer de "pure informatie" vector $(1,1,0,1)$.

Coderen gaat met $(1,1,0,1) \cdot G = (1,1,0,1,0,1,0)$

(ii) Corrigeer en decodeer de ontvangen boodschap $(1,0,1,1,1,0,1)$ of leg uit waarom dit niet kan. Goede toelichting scoort.

Syndroom bepalen: $H \cdot (1,0,1,1,1,0,1)^T = (1,0,0)$. Dit is kolom 5 van H , dus er is een fout op positie 5. Correctie: $(1,0,1,1,0,0,1)$.

Decodering: $(1,0,1,1)$ (eerste vier bits).

NORMERING:

1a:	3	2a:	3	3a:	4	4a:	4	5a:	3	MC:	16
1b:	4	2b:	3	3b:	4	4b:	5	5b:	3		
1c:	7	2c:	6	3c:	4	4c:	5	5c:	3		
:		2d:	3	3d:	4			5d:	6		
	14		15		16		14		15		16

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per foute antwoord.

$$\text{TOTAAL} = 90, \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$

Na afloop van dit tentamen vind je een (min of meer) uitgewerkte versie van het tentamen op teletop. Zie bij "rooster", onderaan.

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6. Een graaf $G = (V, E)$ is een Euler graaf als

- o G een open wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet. **Opl.: ja**

7. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de capaciteit van een minimum snede. **Opl.: ja**
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimale capaciteit van een pijl.
- o bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.

8. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- o voor elke deelverzameling W van V_1 de buurverzameling $B(W)$ ten minste zoveel elementen heeft als W . **Opl.: ja**
- o voor elke deelverzameling W van V_1 de buurverzameling $B(W)$ ten hoogste zoveel elementen heeft als W .
- o elke deelverzameling W van V_1 meer punten heeft dan zijn buurverzameling $B(W)$.
- o elke deelverzameling W van V_1 ten minste zoveel punten heeft als zijn buurverzameling $B(W)$.

9. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes. **Opl.: ja**
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.

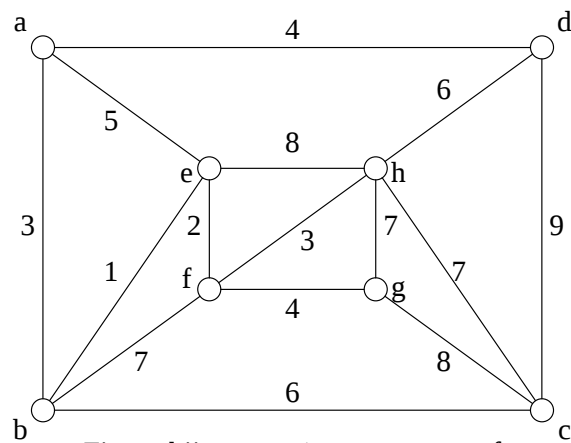
10. Het uitgebreide binomium van Newton is een formule voor

- o $(x_1 + x_2)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel en x_1, x_2 reëel).
- o $(a + b)^{\frac{1}{n}}$ (waar $n \geq 0$ geheel).
- o $\frac{1}{(a + b)^n}$ (waar $n \geq 0$ geheel).
- o $(a + b)^r$ (waar r reëel). **Opl.: ja**

11. De machtreeks van $\frac{1}{(1 + X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} X^k$. **Opl.: ja**

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze deling kan niet worden uitgevoerd.



Figuur bij opgave 1: gewogen graaf