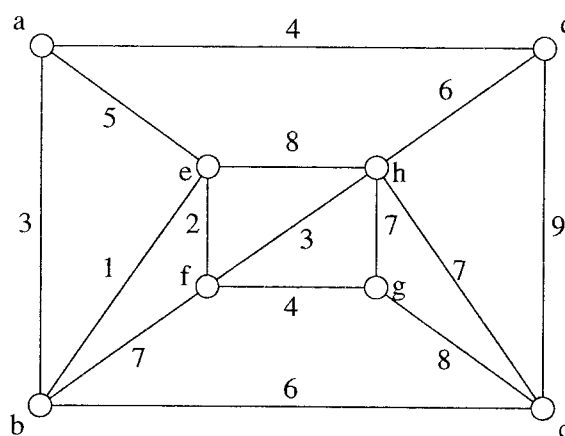


Discrete Wiskunde Tentamen 28-05-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. De Prim Algoritme

- (a) Algemene kennis: Geef de definitie van
- (i) een *boom*,
 - (ii) een *opspannende boom* in een graaf, en
 - (iii) een *minimale opspannende boom* in een gewogen graaf.
- (b) Beschrijf de algoritme van Prim voor het vinden van een minimale opspannende boom in een samenhangende gewogen graaf.
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. (De figuur is overgenomen op het multiple-choice blad.)



Figuur: gewogen graaf

2. Toernooien

- (a) Algemene kennis: leg uit:
- (i) een *Hamilton pad* in een graaf.
 - (ii) een *gericht Hamilton pad* in een gerichte graaf.
 - (iii) een *toernooigraaf*.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	0

- (b) Beschrijf de algoritme waarmee je een gericht pad in een toernooigraaf kunt uitbreiden tot een gericht pad met één punt meer.
- (c) Construeer, volgens deze algoritme en mét toelichting, een Hamilton pad in de gerichte graaf, voorgesteld door de gegeven verbindingsmatrix.
- (d) Wat is een gerichte Hamiltongraaf? Laat zien dat de graaf uit deze opgave geen gerichte Hamiltongraaf is.

3. Combinatoriek en recurrente betrekkingen

- (a) Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende eigenschap:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

- (b) Los volgende recurrente betrekking op onder de gegeven beginvoorwaarden:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4)$$

- (c) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

- (d) Wat is de coëfficiënt van x^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k \right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

4. Het principe van Möbius inversie.

- (a) Algemene kennis.

- (i) Geef de waarde van de Möbius functie in volgende gevallen:

$$\mu(3), \mu(6), \mu(9), \mu(30).$$

- (ii) Gegeven is een geheel getal $n > 1$. We willen de getallen $\mu(d)$ optellen voor alle positieve delers d van n . Wat is de uitkomst?

- (iii) Gegeven zijn twee functies $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Daarbij staat $d|n$ voor " d deelt n ". Het *Möbius inversie principe* zegt dat je nu $g(n)$ kunt oplossen voor alle $n \in \mathbb{N}$. Geef de formule (je hoeft deze niet te bewijzen).

- (b) We kijken naar open of gesloten kettingen van lengte l , waarbij kralen van k verschillende kleuren zijn toegestaan; de kralen zijn verder eender. Het aantal gesloten kettingen van lengte l noemen we $G(l)$. Leg bondig uit hoe je aan volgende twee gelijkheden komt:

$$(i) \quad G(l) = \sum_{d|l} M(d)$$

$$(ii) \quad k^l = \sum_{d|l} d \cdot M(d).$$

Leg ook uit waar het getal $M(d)$ voor staat.

- (c) Pas het principe van Möbius inversie nu toe om een formule voor $M(d)$ te vinden. Bereken hiermee $M(6)$ bij $k=3$ kleuren.

5. Coderingstheorie

- (a) Algemene kennis: leg uit:

1) *minimum afstand* van een code.

2) *twee fouten verbeterende code*.

3) *check matrix* van een lineaire code.

- (b) Gegeven zijn volgende check vergelijkingen voor een lineaire binaire code.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 0$$

Geef de bijhorende checkmatrix H . Hoeveel fouten kan de bijhorende code

detecteren/corrigeren? Goede toelichting scoort.

(c) Geef een generator matrix G bij de check matrix uit deel (b). Wat is de dimensie en de informatiedichtheid van de bijhorende code?

(d) Coderen en decoderen.

(i) Codeer de "pure informatie" vector (1,1,0,1).

(ii) Corrigeer en decodeer de ontvangen boodschap (1,0,1,1,1,0,1) of leg uit waarom dit niet kan.
Goede toelichting scoort.

NORMERING:

1a:	3	2a:	3	3a:	4	4a:	4	5a:	3	MC:	16
1b:	4	2b:	3	3b:	4	4b:	5	5b:	3		
1c:	7	2c:	6	3c:	4	4c:	5	5c:	3		
:		2d:	3	3d:	4			5d:	6		
	14		15		16		14		15		16

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -3 punten per foute antwoord.

$$\text{TOTAAL} = 90, \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{9} + 1$$

Na afloop van dit tentamen vind je een (min of meer) uitgewerkte versie van het tentamen op teletop.
Zie bij "rooster", onderaan.

Naam:

Studierichting en jaar:

28-05-03

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6. Een graaf $G = (V, E)$ is een Euler graaf als

- o G een open wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.

7. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de capaciteit van een minimum snede.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimale capaciteit van een pijl.
- o bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.

8. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- o voor elke deelverzameling W van V_1 de buurenverzameling $B(W)$ ten minste zoveel elementen heeft als W .
- o voor elke deelverzameling W van V_1 de buurenverzameling $B(W)$ ten hoogste zoveel elementen heeft als W .
- o elke deelverzameling W van V_1 meer punten heeft dan zijn buurenverzameling $B(W)$.
- o elke deelverzameling W van V_1 ten minste zoveel punten heeft als zijn buurenverzameling $B(W)$.

9. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n gelijke bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.

10. Het uitgebreide binomium van Newton is een formule voor

- o $(x_1 + x_2)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel en x_1, x_2 reëel).
- o $(a + b)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel).
- o $\frac{1}{(a + b)^n}$ (waar $n \geq 0$ geheel).
- o $(a + b)^r$ (waar r reëel).

11. De machtreeks van $\frac{1}{(1 + X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze deling kan niet worden uitgevoerd.

