

Discrete Wiskunde Voortentamen 27-03-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Stromen in netwerken

(a) Algemene kennis.

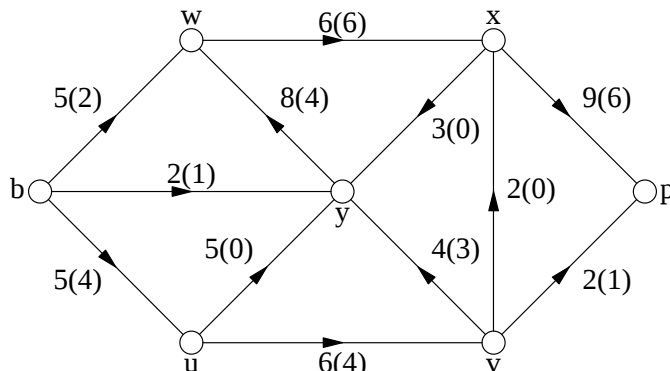
(i) Wat is een *snede* tussen bron en put?

(ii) Wat verstaat men onder de *capaciteit* van een snede en onder *stroom* over een snede?

(b) Formuleer de Stelling van Ford en Fulkerson over maximum stromen in een netwerk.

(c) Formuleer de geheeltallige max-stroom-min-snede stelling.

(d) Verhoog (indien mogelijk) met het labelalgoritme de stroom in volgend netwerk tot een maximum stroom. Geef de bijhorende maximum stroomsterkte en de minimum snede. Werk methodisch.

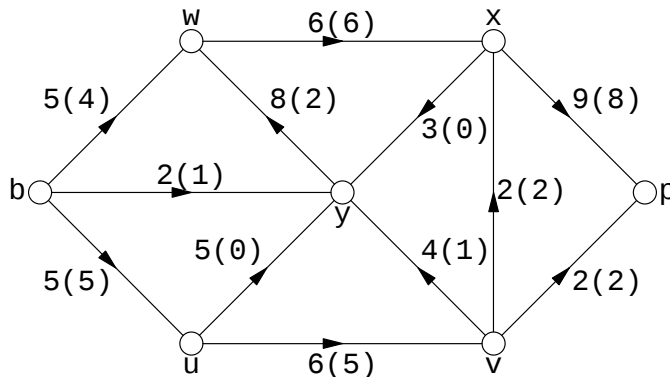


Figuur bij Opgave 1: netwerk met stroom

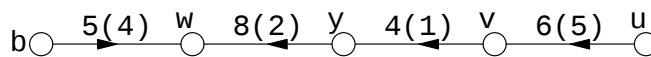
Oplossing:

1) pad $b \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow p$ met $\text{stroomverhoging} = \min\{5-4, 6-4, 2-1\} = 1$

2) pad $b \rightarrow w \leftarrow y \leftarrow v \rightarrow x \rightarrow p$ met $\text{stroomverhoging} = \min\{5-2, 4, 3, 2-0, 9-6\} = 2$



Figuur: maximum stroom na 2 ronden



Zoekboom bij maximumstroom

Max stroomsterkte is $4+1+5=10$. Flessenhals: $\{b, w, y, v, u\}$ met capaciteit 10

2. Koppelingen en het koppelspel

- (a) Algemene kennis. Gegeven is een graaf $G := (V, E)$.
- (i) Wat is een *maximum koppeling* F in G ?
 - (ii) Wat is een *volledige koppeling* F in G ?
 - (iii) Wat bedoelt men precies met een F -*vergroterend wisselpad* in G , waar F een koppeling is?
- (b) Formuleer de *stelling van Berge-Petersen* die over het onderwerp (a)(iii) handelt.
- (c) Twee spelers kiezen om beurt een nieuw punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk punt zó gekozen te worden, dat het verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen, verliest.
- (i) Aan welke voorwaarde(n) moet G voldoen zó dat de beginnende speler een strategie heeft die winst verzekert? Leg deze strategie uit, en argumenteer dat het een winnende strategie is.

Antwoord:

er mag geen volledige koppeling zijn in G . Speler 1 bepaalt (privé) een maximum koppeling F en begint het spel met een F -onverzadigd punt. Bij de keuze van een punt x door speler 2 neemt speler 1 het andere uiteinde van de koppellijn in x . Dit lukt altijd, zoniet zou het gekozen pad tot aan x een F -vergroterend wisselpad zijn.

- (ii) Aan welke voorwaarde(n) moet G voldoen zó dat de tweede speler een strategie heeft die winst verzekert? Leg deze strategie uit, en argumenteer dat het een winnende strategie is.

Antwoord:

Er is een volledige koppeling in G . Speler 2 bepaalt (privé) een volledige koppeling F . Na de keuze door speler 1 van een punt x neemt speler 2 het andere uiteinde van de koppellijn in x .

- (d) Iemand produceert in een graaf twee disjuncte koppelingen F_1 en F_2 van respectievelijke grootte 23 en 11. Motiveer dat er ook twee disjuncte koppelingen kunnen gemaakt worden die elk van grootte 17 zijn.

Antwoord:

Er is een stelling die garandeert dat met de lijnen van $F_1 \cup F_2$ twee nieuwe koppelingen F_1^* en F_2^* kunnen gemaakt worden zó dat $F_1 \cup F_2 = F_1^* \cup F_2^*$, $\#F_1^* = \#F_1 - 1$, en $\#F_2^* = \#F_2 + 1$. Omdat F_1 en F_2 volgens gegeven disjunct zijn, heeft hun vereniging precies 34 lijnen. Omdat de nieuwe koppelingen samen nog steeds 34 lijnen hebben, met de ene $23 - 1 = 22$ en de andere $11 + 1 = 12$, zijn ook deze koppelingen disjunct. Herhaal nu de procedure tot beide koppelingen op 17 lijnen uitkomen en nog steeds disjunct zijn.

3. Toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G := (V_1, V_2; E)$

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat bedoelt men met een *toewijzing* van een verzameling $W \subseteq V_1$ in V_2 ? **Opl.:** Een koppeling die alle punten van W verzadigt.
 - (ii) Wat bedoelt men met een *burentekort* in G ? N.B.: dit is een getal.

Antwoord:

Nul, indien $\#W \leq \#B(W)$ voor iedere $W \subseteq V_1$.

Het grootst mogelijke positieve getal $\#W - \#B(W)$, anders.

- (iii) Wat is een *overdekking* van G ?

Antwoord:

Een puntverzameling zó dat elke lijn incident is met een punt uit de collectie.

- (b) Formuleer de *Stelling van Hall* over toewijzingen in een tweedelingsgraaf G .

Oplossing:

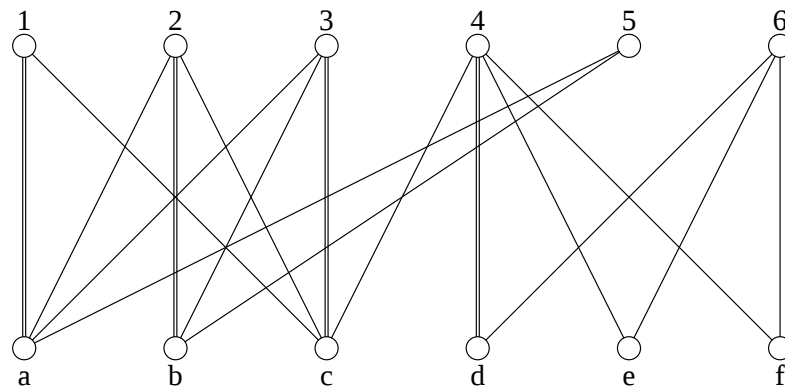
Als $\#B(W) \geq \#W$ voor iedere $W \subseteq V_1$, dan heeft G een toewijzing van V_1 in V_2 .

- (c) Wat verstaat men onder de *Hongaarse Methode*? Geef een beknopte beschrijving van deze algoritme.

Oplossing:

De methode vergroot het aantal lijnen van een toewijzing tot dit aantal maximaal is. Procedure: Loop 1 keer langs de onverzadigde punten. Stel telkens de wisselboom op en onderzoek of er een onverzadigd eindpunt is. Zo ja, wissel koppellijnen en niet-koppellijnen om op het wisselpad tussen dit eindpunt en het gegeven punt.

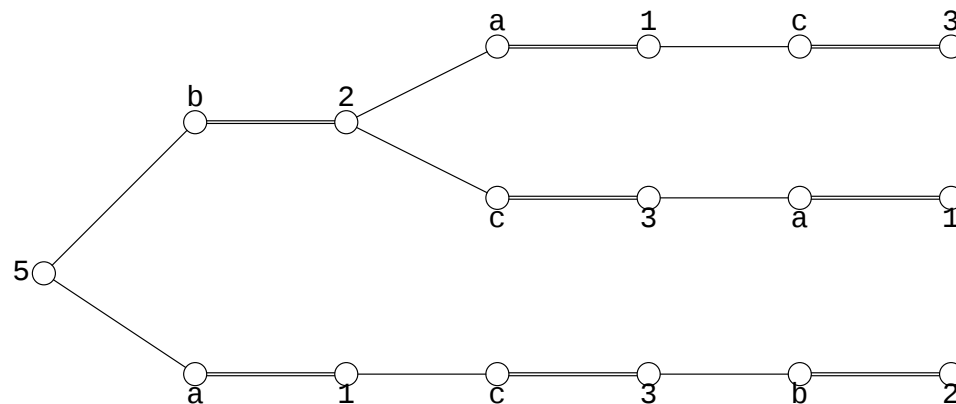
- (d) Zoek met bovengenoemde methode een maximum toewijzing van $V_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in $V_2 := \{a, b, c, d, e, f\}$ in volgende graaf. Begin met de koppeling F , bestaande uit $1a, 2b, 3c, 4d$.



Figuur bij Opgave 3: toewijzing

Oplossing:

Koppel 6 met e. Zoekboom in punt 5:



Alle eindpunten zijn verzadigd, de koppeling is nu van maximum grootte.

- (e) Geef het buretekort (0 of meer), geef de bijhorende "flessenhals" verzameling $W^* \subseteq V_1$, en construeer uit dit gegeven een minimum overdekking van G .

Oplossing:

De zoekboom bij punt 5 levert als flessenhals: $W^* := \{1, 2, 3, 5\}$ en $B(W^*) = \{a, b, c\}$. Het burentekort bedraagt 1.
De bijhorende minimum overdekking is: $V_1 \setminus W^* \cup B(W^*) = \{4, 6, a, b, c\}$.
Deze moet even groot zijn als de maximum toewijzing (stelling van König-Egerváry)

Normering:

1	a	5	2	a	5	3	a	3	MC	22
	b	5		b	6		b	4		
	c	5		c	8		c	4		
	d	7		d	4		d	6		
							e	6		
		22			23			23		22

Totaal = 90, Cijfer = Totaal/10 + 1

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -4 ptn per fout antwoord.

4. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist en volledig.
- Lees de mogelijke antwoorden zorgvuldig.

5. Een graaf G is een Euler graaf als

- o G een open wandeling bevat die elk punt precies één keer aandoet.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elke lijn precies één keer aandoet. **Opl.: Ja**

6. Het Handelsreizigersprobleem is

- o het probleem om in een gewogen graaf een minimum gewicht Hamilton cykel te vinden.
- o het probleem om in een volledige gewogen graaf een minimum gewicht Hamilton cykel te vinden. **Opl.: Ja**
- o het probleem om in een gewogen graaf een minimum gewicht gesloten wandeling te vinden die elke lijn tenminste één keer aandoet.
- o het probleem om in een gewogen graaf een minimum gewicht open wandeling te vinden die langs alle punten komt.

7. Onder een centraal punt van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom dat even ver van alle eindpunten ligt.
- o Een punt met takken van maximum lengte.
- o Een punt waarvan de langste tak de kortste is onder alle punten. **Opl.: Ja**
- o Het zwaartepunt van de boom bij een gegeven toekenning van gewichten aan de lijnen.

8. Het optimale-toewijzingen probleem in een gewogen tweedelingsgraaf G heeft betrekking tot:

- o Het toewijzen van een snede van G met minimaal gewicht.
- o Het vinden van een volledige koppeling (toewijzing) in G van minimum gewicht. **Opl.: Ja**
- o Het vinden van een vergrotend wisselpad van minimum gewicht.
- o Het bepalen van een minimum-gewicht overdekking van G .

9. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is

- o de som van alle stromen op de pijlen van p . **Opl.: Ja**
- o de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
- o de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p .
- o de verhouding tussen de stroom door een snede en de capaciteit van die snede.

10. De stelling van König-Egerváry zegt:

- o In een graaf is de grootte van een minimumoverdekking gelijk aan de grootte van een maximumtoewijzing.
- o In een tweedelingsgraaf is de grootte van een minimumoverdekking gelijk aan de grootte van een maximumtoewijzing. **Opl.: Ja**
- o In een graaf is het lijnkleuringsgetal gelijk aan de maximumgraad.
- o In een tweedelingsgraaf is het lijnkleuringsgetal gelijk aan de grootte van een minimumoverdekking.

11. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

- o het maximale aantal kleuren van een nette lijnkleuring dat in één punt kan samenkomen.
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd. **Opl.: Ja**
- o het aantal verschillende mogelijkheden om de lijnen van de graaf netjes te kleuren.