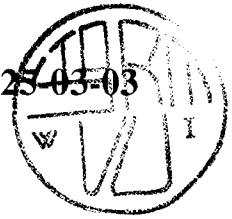


Discrete Wiskunde Tentamen Oude Stijl (ECT/BWI) 25-03-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.



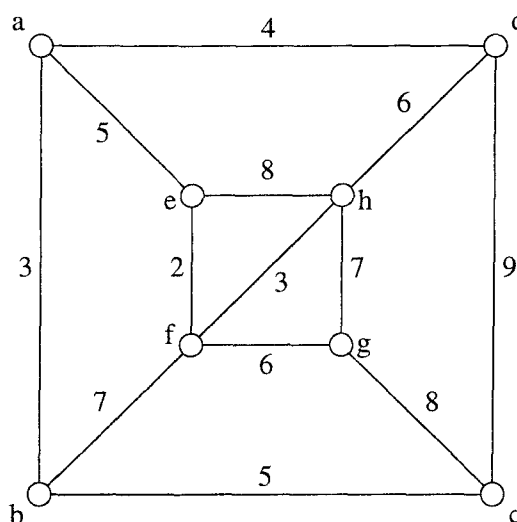
1. Dominostenen

Op een k -dominosteen staan twee al dan niet verschillende getallen $0, 1, \dots, k$. Een volledige set k -dominostenen bevat elke (herhalings)combinatie van twee getallen precies één keer. Het is de bedoeling stenen in een grote lus aan mekaar te leggen, zó dat op de aangrenzende velden van twee stenen hetzelfde getal staat.

- (a) Geef een grafentheoretische beschrijving van een set k -dominostenen.
- (b) Formuleer de stelling van Euler over het bestaan van bepaalde gesloten wandelingen in een graaf G .
- (c) Combineer delen (a) en (b): Bij welke waarden van k bestaat er een gesloten lus van k -dominostenen die alle stenen gebruikt?
- (d) Laat $k \geq 3$. Als er géén gesloten figuur bestaat die alle k -stenen bevat, hoeveel stenen (uitgedrukt in k) blijven er dan minimaal over? Beredeneer je antwoord.

2. De Prim Algoritme

- (a) Algemene kennis.
 - (i) Wat is een *opspannende boom* in een graaf?
 - (ii) Welke voorwaarde(n) zijn nodig en voldoende voor een graaf om een opspannende boom te bezitten?
- (b) Beschrijf het *algoritme van Prim* voor het vinden van een minimale opspannende boom in een gewogen graaf (met geschikte eigenschappen).
- (c) Bepaal met dit algoritme een minimale opspannende boom in bijgevoegde graaf en geef het gewicht van de gevonden boom. (N.B.: De figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.)



Figuur bij Opgave 2: de Prim Algoritme

3. Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met een *overdekking* in een graaf?

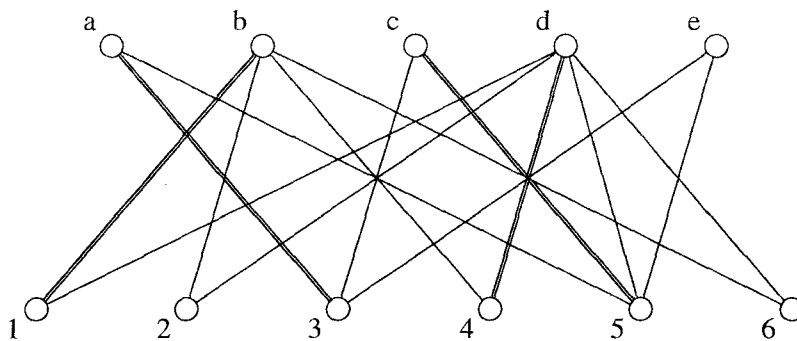
(ii) Wat zegt de *stelling van König en Egerváry* in verband met overdekkingen en toewijzingen?

(b) Gegeven is volgende toewijzing in een tweedelingsgraaf G :

$$a - 3, b - 1, c - 5, d - 4.$$

(N.B.: Onderstaande figuur is overgenomen op het Multiple-choice blad.) Controleer methodisch dat dit een maximum toewijzing is in G . Geef voldoende details.

(c) Construeer met de resultaten uit deel (b) een minimale overdekking in G . Geef voldoende details van je constructie(s).



Figuur bij Opgave 3: Overdekkingen en Optimale toewijzingen

(d) Zoek in volgende kostenmatrix methodisch naar een minimale toewijzing. Geef de gevonden toewijzing en haar gewicht.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 10 & 12 & 9 \\ 8 & 7 & 13 & 16 & 12 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 15 \\ 10 & 4 & 7 & 13 & 11 \\ 12 & 9 & 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

4. Recurrente betrekkingen

(a) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4)$$

(b) Los volgende recurrente betrekking op met behulp van genererende functies:

$$a_n - 3a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

Bepaal hiermee a_9 en a_{10} .

(c) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte n . Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen noemen we a_n .

(i) Geef a_1 , a_2 en a_3 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

U hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

5. Coderingstheorie

- (a) Algemene kennis:
- (i) Wat bedoelt men met de *Hamming afstand* in een woordruimte?
 - (ii) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding*?

N.B.: Wees precies.

- (b) Gegeven is een generator matrix G voor een lineaire binaire code.

- (i) Ga na hoeveel informatie- en check symbolen er zijn, en
- (ii) codeer het meegegeven bericht $\vec{b}$.

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := (1, 0, 1).$$

- (c) (Vervolg deel (b)) Schrijf de bijhorende check matrix H uit.
- (d) (Vervolg delen (b) en (c)) Een gecodeerd bericht $\vec{w} := (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ wordt ontvangen. Decodeer dit bericht na een eventuele fout te hebben verbeterd, of geef aan waarom de fout niet kan worden verbeterd.

Normering

1a: 3	2a: 3	3a: 3	4a: 4	5a: 3	6: 18
b: 3	b: 3	b: 4	b: 5	b: 4	
c: 4	c: 6	c: 5	c: 5	c: 4	
d: 4		d: 5		d: 4	
14	12	17	14	15	18

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op "teletop" bij het vak "Discrete Wiskunde" een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Je komt in teletop via

<http://teletop.few.vu.nl/>

Daar kies je voor "Discrete Wiskunde 2002-2003". Login en password voor gasten is: "gast2002". Klik dan op "Cursusinfo" en vervolgens op "materiaal". De attachment bestaat in postscript en in pdf. Bij problemen, email marcel@cs.vu.nl.

Naam:

Studierichting en jaar:

25-03-03

6. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én (meest) volledig.

6.1. Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf

- o een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
- o een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
- o een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
- o een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.

6.2. De stelling van Berge-Petersen zegt:

- o Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

6.3. De Hongaarse methode betreft de constructie van

- o een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf.
- o een latijns vierkant uit een latijnse rechthoek.
- o een maximale wisselboom in een tweedelingsgraaf.
- o een maximum stroom in een netwerk.

6.4. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met n kralen als er k kleuren beschikbaar zijn. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een n –kombinatie van k elementen?
- o Een n –herhalingskombinatie van k elementen?
- o Een n –rangschikking van k elementen?
- o Een n –herhalingsrangschikking van k elementen?
- o Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in k eendere porties.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq k$.

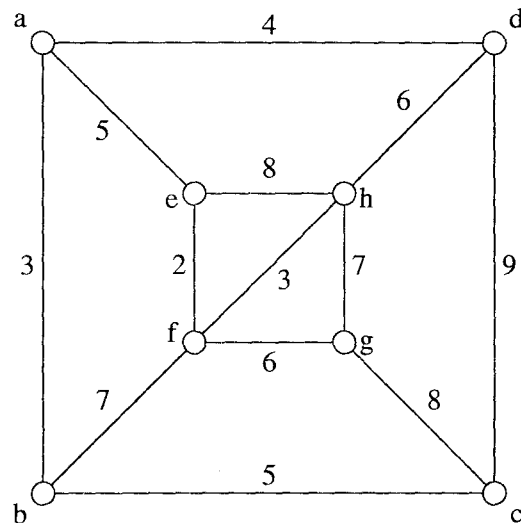
N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

6.6. Het principe van inclusie-exclusie in een "universum" U stelt dat het aantal elementen in U dat aan géén van t condities voldoet, gelijk is aan:

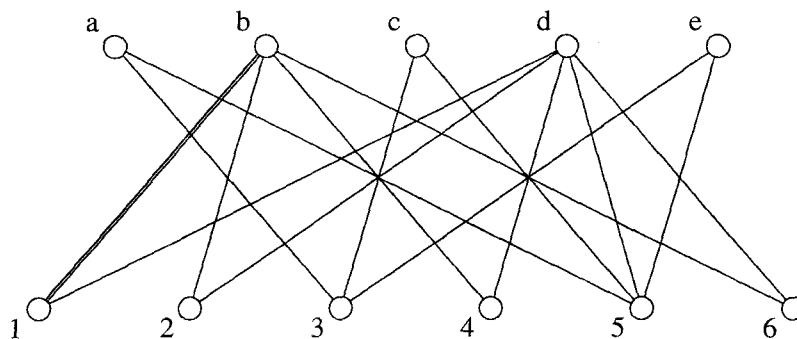
- o de alternerende som $\sum_{1 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i de som is over alle i -tallen condities van de aantallen elementen die deze i condities overtreden.
- o de alternerende som $\sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i de som is over alle i -tallen condities van de aantallen elementen die aan deze i condities voldoen.
- o de alternerende som $\sum_{1 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat precies i condities overtreedt.
- o de alternerende som $\sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i S_i$, waar S_i het aantal elementen is dat aan precies i condities voldoet.

6.7. Een perfect 3 fouten verbeterende code is een code waarbij

- o voor ieder woord met precies drie fouten een codewoord bestaat op afstand drie.
- o voor ieder woord met ten hoogste drie fouten een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- o voor ieder woord een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- o voor ieder woord een codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.



Figuur bij Opgave 2: de Prim Algoritme



Figuur bij Opgave 3: Overdekkingen en Optimale toewijzingen