

Tentamen Discrete Wiskunde 12-08-02

☞ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet ☜

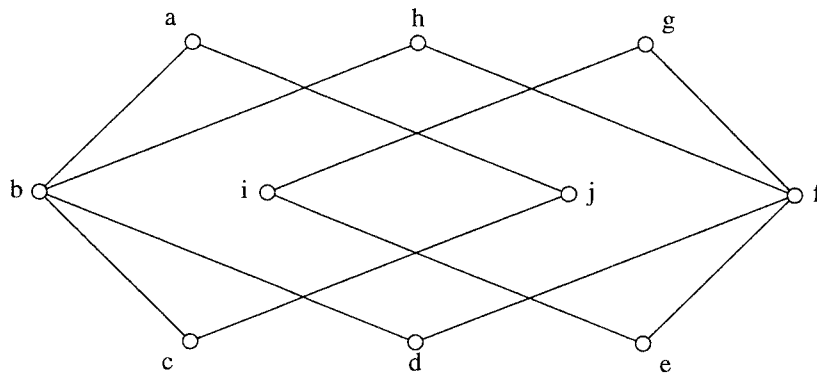
1. De algoritme van Fleury

a) Algemene kennis. In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.

- 1) Wat bedoelt men met een *gesloten Euler wandeling* in een graaf?
- 2) Wat is een *brug* in een graaf?
- 3) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler wandelingen in een graaf.

b) Geef een korte beschrijving van de *Fleury algoritme* in een algemene Euler graaf (géén voorbeeld).

c) Geef een Euler wandeling in de graaf uit volgende figuur (je mag de kopie bij het multiple choice formulier gebruiken). Het uiteindelijke antwoord moet een lijst van punten zijn in wandelvolgorde.



d) Toon aan dat een samenhangende graaf met precies 2 onevengraadse punten een open Euler wandeling heeft met deze twee punten als eindpunten.

2. Koppelingen

a) Algemene kennis. Gegeven is een (gewone, ongerichte) graaf $G := (V, E)$.

- 1) Wat is een *koppeling* in G ?
- 2) Wat is een *maximum koppeling* in G ?
- 3) Wat is een *volledige koppeling* in G ?

b) Wat bedoelt men precies met een F -*vergroterend wisselpad* in een graaf $G := (V, E)$ met koppeling F ? Formuleer de *stelling van Berge-Petersen* die over dit onderwerp handelt.

c) Twee spelers kiezen om beurt een punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk volgend punt zó gekozen te worden, dat het met een lijn verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen, verliest. Naargelang de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een strategie die winst verzekert. Leg deze strategie uit, geef aan wanneer ze kan worden toegepast, en geef het verband met de stelling van Berge-Petersen aan.

3. Tellen

- a) Negen verschillende pakjes moeten in een kring rond de kerstboom worden gelegd.
- 1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?
 - 2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal opnieuw het aantal mogelijkheden.

Een formule met toelichting volstaat in beide onderdelen a1) en a2).

- b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

- c) Vijftien identieke knikkers worden verdeeld over zes verschillende potjes, waarbij precies twee potjes leeg dienen te blijven en precies één potje een oneven aantal knikkers moet bevatten. Hoeveel mogelijke resultaten zijn er? Geef toelichting bij de uitkomst.

4. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.
- 1) Wat is het *Laatjesprincipe*?
 - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - 3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$.

5. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis.
- 1) Wat bedoelt men met de *minimumafstand van een code*?
 - 2) Wat bedoelt men met een *lineaire code*?
 - 3) Wat bedoelt men met de *informatiedichtheid* van een lineaire code?
- b) Wat is het precieze verband tussen de minimumafstand van een code en het aantal fouten dat je per woord kunt detecteren, resp., corrigeren?
- c) In de woordruimte $\{0,1\}^6$ worden drie parity check vergelijkingen gegeven voor een binaire lineaire code C :
- $$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= x_4, \\x_1 + x_3 &= x_5, \\x_2 + x_3 &= x_6.\end{aligned}$$
- 1) Hoeveel codewoorden heeft de code C ?
 - 2) Wat is de minimumafstand en de informatiedichtheid van deze code?

- 3) Wat kun je zeggen over het foutendetecterend/corrigerend vermogen van C ?
- d) Geef een checkmatrix H en een generatormatrix G voor de code uit deel c). Toelichting hoeft niet; je mag de resultaten uit dit onderdeel ook bij c) gebruiken indien gewenst.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	6	4a:	3	5a:	3
1b:	3	2b:	5	3b:	4	4b:	6	5b:	3
1c:	4	2c:	7	3c:	5	4c:	6	5c:	6
1d:	5							5d:	3
15		15		15		15		15	

Voor het multiple choice gedeelte (op 15 punten) geldt: -3 punten per fout antwoord.

TOTAAL = 90 ptn

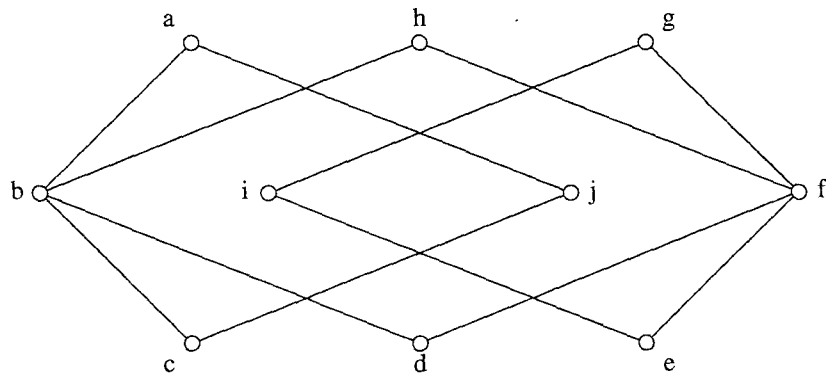
CIJFER = TOTAAL / 10 + 1

Naam:

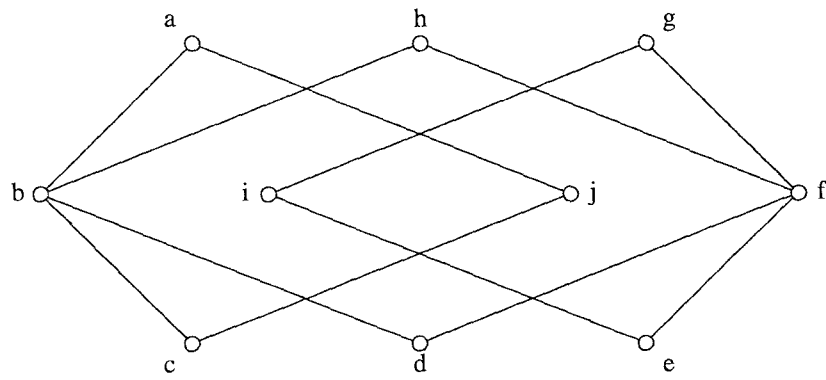
Studierichting en jaar:

12-08-02

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
 - In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.
6. Een graaf $G = (V, E)$ is een boom als
- ☐ tussen elke twee punten een kortste pad bestaat. •
 - ☐ geen enkele component van G een cykel bevat. •
 - ☐ G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft. •
 - ☒ G samenhangend is en elke lijn uit E een brug is.
7. De Dijkstra algoritme is een algoritme die
- ☐ een minimale toewijzing bepaalt in een gewogen graaf.
 - ☒ een minimale padenboom bepaalt in een gewogen graaf.
 - ☐ een maximale stroom bepaalt in een netwerk.
 - ☐ een minimale rondwandeling bepaalt in een afstandsgraaf.
8. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is
- ☐ de uitstroom in een willekeurig punt (maar niet p).
 - ☒ de uitstroom in de bron b .
 - ☐ de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
 - ☐ de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p .
9. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is
- ☐ het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
 - ☐ het aantal volledige koppelingen (= kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld.
 - ☐ het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.
 - ☐ het aantal verschillende mogelijkheden om de lijnen van de graaf netjes te kleuren.
10. De genererende functie van een rij $(a_n)_n$ is
- ☐ de algoritme waarmee de elementen a_n achtereenvolgens gegenereerd worden.
 - ☐ de formule waarmee de recurrente betrekking wordt beschreven.
 - ☐ de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
 - ☐ de functie $f(n) = a_n$ voor n in $\mathbb{N}$, die de recurrente betrekking oplost.
11. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met
- ☐ het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n gelijke bakjes.
 - ☐ het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n gelijke bakjes.
 - ☐ het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes.
 - ☐ het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.
 - ☐ geen van voorgaande.



Figuur: de graaf bij vraag 1c



Figuur: de graaf bij vraag 1c