

## Tentamen Discrete Wiskunde 06-06-02

☞ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet ☜

### 1. Het Handelsreizigersprobleem

- Leg uit wat men bedoelt met het *Handelsreizigersprobleem* in een gewogen graaf.
- Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een gewogen samenhangende graaf?
- Er is een algoritme waarmee men het handelsreizigersprobleem in een gewogen graaf of in een afstandsgraaf bij benadering kan oplossen. In de basisstap van deze algoritme wordt geprobeerd een Hamilton cykel te verbeteren. Leg uit hoe deze stap werkt.

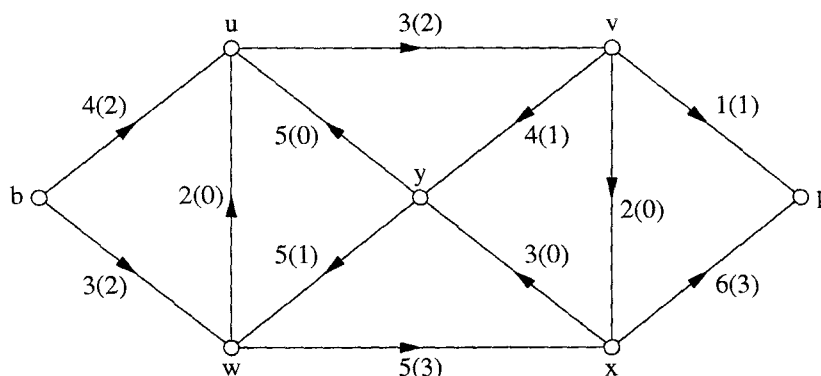
d)

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 3 | 9 | 4 |
| B | 8 | 0 | 9 | 3 | 5 |
| C | 3 | 9 | 0 | 9 | 4 |
| D | 9 | 3 | 9 | 0 | 5 |
| E | 4 | 5 | 4 | 5 | 0 |

Ga uit van de hiernaast gegeven gewichtenmatrix en van de cykel  $A B C D E A$ . Zoek met de algoritme uit c) naar een verbetering van de cykel, net zo lang tot de methode geen verbetering meer oplevert. Geef de gevonden cykel en zijn gewicht.

### 2. Stromen in netwerken

- Wat is de stroomsterkte van een stroom in een netwerk? Wat is een snede tussen bron en put? Wat verstaat men onder de capaciteit van een snede en onder stroom over een snede?
- Formuleer de Stelling van Ford en Fulkerson over stromen in een netwerk.
- Construeer door middel van stroomverhoging een maximum geheelgetallige stroom in volgend netwerk. Geef de tussenstappen, en geef de gevonden maximum stroom.



(Deze figuur is in viervoud overgenomen achter het in te leveren multiple-choice gedeelte).

- Geef een minimum snede in voorgaand netwerk.

### 3. Combinatoriek

- a) Op hoeveel verschillende manieren kunnen  $k$  personen op  $n$  stoelen plaatsnemen als

- 1) die stoelen op een rij staan.
- 2) die stoelen in een kring staan.

Geef telkens de redenering en de formule.

- b) Bepaal het aantal oplossingen van de ongelijkheid

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$$

waarbij  $x_1, \dots, x_4$  gehele getallen  $\geq 0$  voorstellen (redenering en formule volstaan).

- c) Stel een recurrente betrekking op voor het aantal woorden van  $n$  symbolen  $a, b$ , waarin nooit twee  $b$ 's naast elkaar voorkomen. Geef de redenering; je hoeft de betrekking niet op te lossen.

### 4. Machtreeksen en Recurrente betrekkingen

- a) Zij  $\alpha$  een reëel getal en  $k > 0$  geheel. Geef een formule voor  $\binom{\alpha}{k}$ . Geef tevens het (veralgemeende) binomium van Newton voor  $(1 + X)^\alpha$ , waarin deze getallen optreden.

- b) Laat zien dat deze machtreeks overeenstemt met het klassieke binomium wanneer  $\alpha$  geheel positief is.

- c) Bereken  $\binom{1/2}{k}$  voor  $k > 0$  geheel. Geef nu de machtreeks voor  $\sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2}$ .

- d) Bepaal met voorgaande resultaten een oplossing voor de recurrente betrekking

$$a_{n+1} = 2 \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot a_{n-j} \quad (a_0 = 1).$$

Geef de tussenstappen van je methode en de eindformule voor  $a_n$  duidelijk aan.

### 5. Coderingstheorie

- a) Leg uit:

- 1) *Hamming afstand* tussen twee woorden.
- 2) *maximum likelihood decoding* (foutverbetering)
- 3) *3-fouten verbeterende code*.

- b) Hoe zie je aan de check matrix van een lineaire code dat je

- 1) Eén fout kan detecteren?
- 2) Twee fouten kan corrigeren?

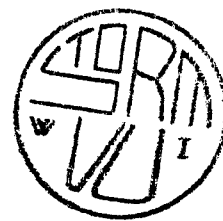
- c) We beschikken over de binaire (modulo twee) check matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal het syndroom en, indien mogelijk, het foute bit, bij de volgende ontvangen woorden:

$$(1, 1, 0, 0, 1) \quad (1, 0, 1, 0, 0).$$

- d) Geef een generator matrix  $G$  bij de check matrix uit deel c). Wat is de dimensie van de bijhorende code?



**NORMERING:**

|       |   |       |   |       |   |       |   |       |   |
|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|
| 1a:   | 3 | 2a:   | 3 | 3a:   | 5 | 4a:   | 3 | 5a:   | 3 |
| 1b:   | 2 | 2b:   | 3 | 3b:   | 5 | 4b:   | 2 | 5b:   | 2 |
| 1c:   | 3 | 2c:   | 7 | 3c:   | 5 | 4c:   | 5 | 5c:   | 5 |
| 1d:   | 7 | 2d:   | 2 |       |   | 4d:   | 5 | 5d:   | 5 |
| <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   |
| 15    |   | 15    |   | 15    |   | 15    |   | 15    |   |

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: Aantal punten = 15 - 3\* aantal foute antwoorden

Het totaal te behalen punten is 90.

$$\text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{9} + 1$$

Naam:

Studierichting en jaar:

06-06-02

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6. Een graaf  $G = (V, E)$  is een tweedelingsgraaf als

- o  $G$  geen cykels bevat.
- $G$  geen oneven cykels bevat.
- o  $G$  geen even cykels bevat.
- o  $G$  precies twee componenten heeft.

7. Onder een centrum van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom dat even ver van alle eindpunten ligt.
- o Een punt met takken van maximum lengte.
- Een punt waarvan de langste tak de kortste is onder alle punten.
- o Het zwaartepunt van de boom bij een gegeven toekenning van gewichten aan de lijnen.

8. Een opspannende boom in een samenhangende graaf  $G = (V, E)$  is

- o een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf van  $G$ .
- o een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf van  $G$ .
- een boom met dezelfde vertices als  $G$ .
- o een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten  $G$  onsamenshangend maakt.

9. Een  $k$ -herhalingscombinatie van  $n$  elementen is een keuze van  $k$  elementen uit een  $n$ -verzameling waarbij

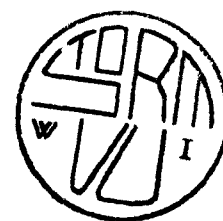
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element ten hoogste éénmaal voorkomt en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en gelet wordt op de volgorde van de elementen.
- o ieder element meermaals mag voorkomen en niet gelet wordt op de volgorde van de elementen.

10. Zij  $A$  een willekeurige machtreeks. Het quotient  $A/B$  bestaat precies dan als

- o de machtreeks  $B$  niet de nulreeks is.
- o de machtreeks  $B$  een konstante term  $\neq 0$  heeft.
- o als elke coëfficiënt van de machtreeks  $B$  van nul verschilt.
- o als de machtreeks  $B$  een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

11. Het principe van inclusie-exclusie in een "universum"  $U$  stelt dat het aantal elementen in  $U$  dat aan géén van  $t$  condities voldoet, gelijk is aan:

- o  $\#U$  min de som voor  $i = 1, \dots, t$  van het aantal elementen  $S_i$  wat precies  $i$  van deze  $t$  condities voldoet.
- o de alternerende som  $\sum_{i \leq t} (-1)^i S_i$ , waar  $S_i$  de som is van de aantallen elementen die  $i$  condities voldoen.
- o de som voor  $0 \leq i \leq t$  van de aantallen elementen  $S_i$  die precies  $i$  condities overtreden.
- o het minimum voor  $0 \leq i \leq t$  van de aantallen elementen  $S_i$  die precies  $i$  condities voldoen.



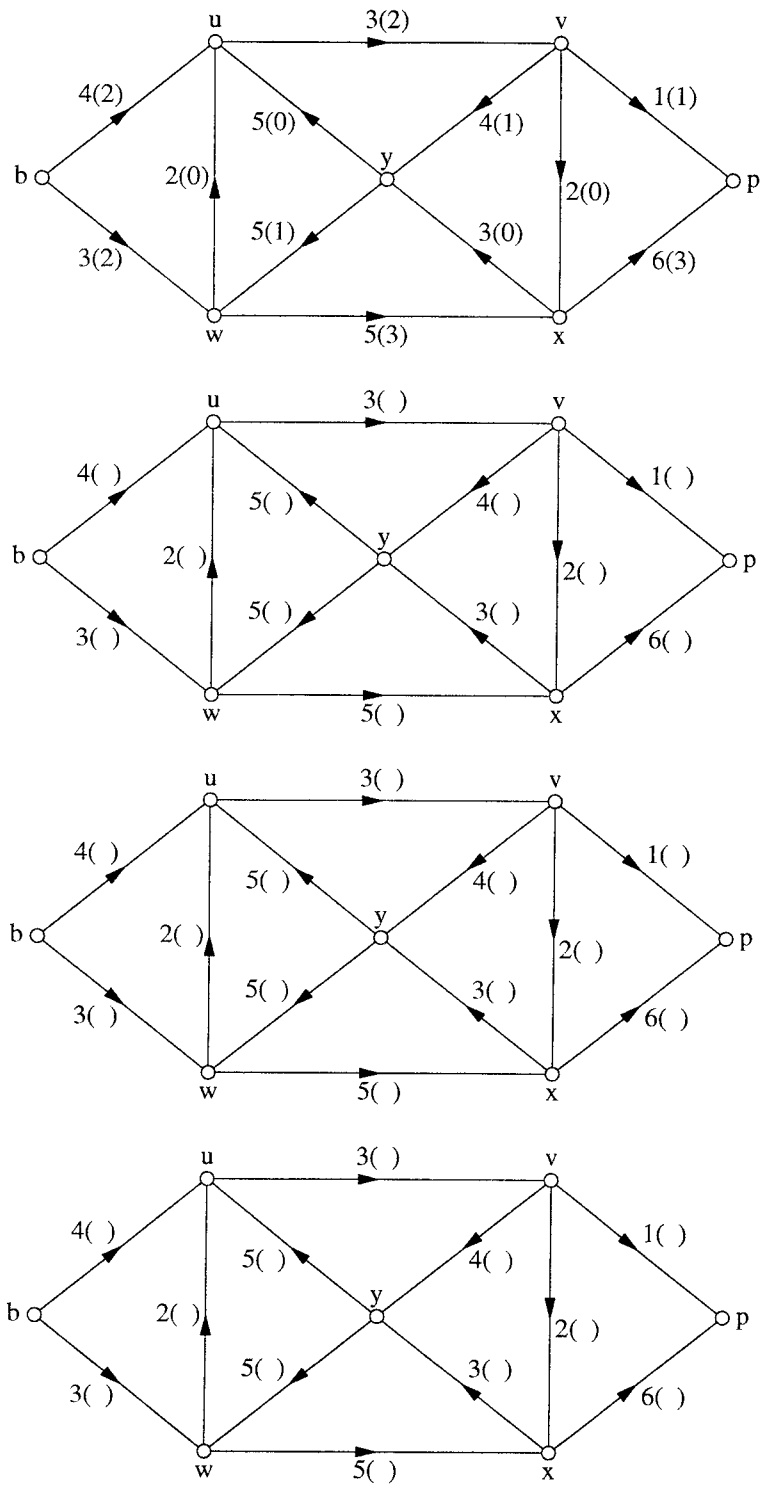


Fig.: netwerk met stroom bij opgave 2.