



Tentamen Discrete Wiskunde 04-04-02

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Latijnse vierkanten

a) Algemene kennis:

- 1) Wat verstaat men onder een *latijnse rechthoek* en wat verstaat men onder een *latijns vierkant*?
 - 2) Wat verstaat men onder een nette lijnkleuring?
- b) Geef een voorbeeld van een latijnse 2×5 rechthoek met eerste rij (1 3 5 2 4).
- c) Licht aan de hand van dit voorbeeld toe hoe je een latijnse rechthoek kunt modelleren in een koppelings- of nette lijnkleurings-probleem met reguliere tweedelingsgrafen.
- d) Formuleer de stelling over nette lijnkleuringen waarmee je kunt afleiden dat elke latijnse rechthoek kan worden voortgezet tot een latijns vierkant.
- e) Geef zo'n voortzetting voor je rechthoek in (b) tot een vierkant. Geef ook het grafische model van je oplossing.

2. Koppelingen en het koppelspel

a) Algemene kennis:

- (1) Wat is een maximum koppeling in een graaf $G := (V, E)$?
 - (2) Wat is volledige koppeling in een graaf $G := (V, E)$?
 - (3) Wat bedoelt men precies met een F -vergroterend wisselpad in een graaf $G := (V, E)$ met koppeling F ?
- b) Formuleer de *stelling van Berge-Petersen* die handelt over maximum koppelingen.
- c) Twee spelers kiezen om beurt een nieuw punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk punt zó gekozen te worden, dat het verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen verliest. Naargelang de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een strategie die winst verzekert. Bespreek dit fenomeen met aandacht voor volgende punten:
- (1) Welke eigenschap van de graaf is geschikt voor een winnende strategie van speler 1 (die begint) en welke eigenschap van de graaf is geschikt voor een winnende strategie van speler 2?
 - (2) Hoe moet je handelen volgens deze strategieën?
 - (3) Wat is het verband met de stelling van Berge-Petersen?

3. Tellen

a) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

b) Aan vier personen wordt gevraagd een cijfer van 1 tot 9 te noemen. Hoe groot is de kans dat een cijfer meer dan eens genoemd wordt? Argumenteer je antwoord.

- c) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

4. Genererende functies.

- a) Algemene kennis:
- (1) Wat bedoelt men met: de genererende functie (machtreeks) van de rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$?
 - (2) Welke machtreeks wordt voorgesteld door het quotient $1/(1+X)$?
- b) We hebben rode en blauwe knikkers die verder identiek zijn en die we willen verdelen over n verschillende bakjes. Ieder bakje moet tenminste één rode knikker bevatten. Geef de modelmachtreeks voor rode knikkers in het i de bakje en voor blauwe knikkers in het i de bakje.
- c) Bepaal met de resultaten uit deel b) de genererende functie voor het probleem met n bakjes.
- d) Bereken met het resultaat uit deel c) op hoeveel manieren we 9 rode of blauwe knikkers kunnen strooien over $n=5$ verschillende bakjes die elk tenminste één rode knikker dienen te bevatten?

5. Inclusie-exclusie principe

- a) Algemene kennis:
- (1) Geef, met toelichting van alle gebruikte symbolen, een beschrijving van het principe van inclusie en exclusie. U hoeft geen bewijs te geven van de formule.
 - (2) Pas het principe toe in volgende eenvoudige situatie. Drie verzamelingen A, B, C zijn gegeven in een universum U , waarbij

$\#A = 11$	$\#(A \cap B) = 4$	$\#(A \cap B \cap C) = 3$
$\#B = 8$	$\#(B \cap C) = 5$	$\#U = 22$
$\#C = 9$	$\#(C \cap A) = 5$	

- b) Hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 zijn deelbaar door 5 en hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 zijn deelbaar door 7?
- c) Bepaal met het principe van inclusie en exclusie hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 niet deelbaar zijn door 5, 6, of 7. Geef alle tussenresultaten duidelijk aan.

6. Coderingstheorie en vectorruimten

- a) Algemene kennis:
- (1) Wat verstaat men onder de *Hamming-afstand tussen twee woorden* $w_1, w_2 \in W$.
 - (2) Wat verstaat men onder de *bol om het nulwoord met straal r* ?
 - (3) Hoeveel elementen bevat die bol als de straal $r = 1, 2$ en de woordlengte n is? (Geef de formules.)

We werken verder met de woordruimte $W := \{0, 1\}^7$, dit is, een vector ruimte over $\{0, 1\}$ van dimensie 7.

b) We beschikken over de volgende 0/1-matrix G :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laat zien dat de vier rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn in W .

- c) Bekijk nu de matrix G als de generator matrix voor een lineaire binaire code C . Wat is de dimensie van deze code? Wat verstaat men onder een bijhorende *check matrix* H ? Geef zo'n check matrix.
- d) Ik ontvang onder deze code C het woord $w := (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$. Welk woord werd (volgens maximum likelihood decoding) verstuurd? Verbeter het foute bit indien nodig.

Normering:

1a:	2	2a:	3	3a:	5	4a:	2	5a:	3	6a:	3	M:	16
1b:	1	2b:	3	3b:	5	4b:	2	5b:	2	6b:	3		
1c:	4	2c:	6	3c:	5	4c:	3	5c:	5	6c:	3		
1d:	3					4d:	5			6d:	3		
1e:	3												
	13		12		15		12		10		12		16

Voor het Multiple-choice gedeelte (6 vragen) geldt: -3 ptn per fout antwoord

Cijfer = Som / 10 + 1

Naam: Studierichting en jaar:

04-04-02

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd. In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

7. Een netwerk is

- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
- o een gerichte graaf waarin aan elk punt een positief getal (de puntcapaciteit) is toegekend.
- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.
- o een gerichte, sterk samenhangende, graaf met een bron en een put.

8. Het optimale-toewijzingen probleem in een gewogen tweedelingsgraaf G heeft betrekking tot:

- o Het toewijzen van een snede van G met minimaal gewicht.
- o Het vinden van een volledige koppeling (toewijzing) in G van minimum gewicht.
- o Het vinden van een vergrotend wisselpad van minimum gewicht.
- o Het bepalen van een minimum-gewicht overdekking van G .

9. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- o $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
- o $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
- o $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
- o $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .

10. Een Ferrer diagram is een schematische voorstelling van een partitie

- o waarbij ieder deel van de partitie wordt weergegeven door de punten van een rij en de rijen in volgorde van niet-toenemende grootte zijn gerangschikt aan de linker marge.
- o door middel van een tweedelingsgraaf met de leden van de partitie in het ene deel, de elementen in het andere deel, en een lijn tussen een verzameling en elk van haar elementen.
- o door middel van een volledige graaf, met de delen van de partitie als vertices.
- o door middel van de formule $x_1 + \dots + x_k = n$, waarbij n het totale aantal elementen is, en x_i het aantal elementen in het i -de deel.

11. Welk van de volgende problemen is een voorbeeld van een k -herhalingscombinatie van n elementen?

- o Het aantal woorden met k symbolen uit het alfabet ($k \leq n = 26$)
- o Het aantal mogelijkheden om k identieke brieven in n verschillende brievenbussen te stoppen (k, n willekeurig)?
- o Het aantal mogelijke weddenschappen op de eerste k plaatsen in een race met n paarden ($k \leq n$)?
- o Het aantal comités van k personen samengesteld uit n kandidaten ($k \leq n$).
- o Geen van deze.

12. De Hongaarse Methode betreft de constructie van
- ☐ een maximale wisselboom in een tweedelingsgraaf.
 - ☐ een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf.
 - ☐ een maximum stroom in een netwerk.
 - ☐ een minimum opspannende boom in een gewogen graaf.