



(WIS/ECT) Voortentamen Discrete Wiskunde 28-03-02

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Euler grafen en hun toepassingen

a) (Algemene kennis)

- 1) Leg uitvoerig uit wat men verstaat onder een *Euler graaf* G .
- 2) Leg uitvoerig uit wat men verstaat onder een *gerichte Euler graaf* G .
- 3) Beschrijf precies wat men verstaat onder een *brug* in een graaf G .

b) Formuleer de *Stelling van Euler* met betrekking tot grafen en met betrekking tot gerichte grafen.

c) Zij $G=(V, E)$ een samenhangende graaf. Toon aan dat er een rondwandeling is in G die elke lijn precies twee maal doorloopt, en wel één keer in elke richting.

d) Toon aan dat in een samenhangende graaf $G=(V, E)$ met precies vier onevengraadse punten er een opdeling bestaat van de lijnenverzameling E in twee open wandelingen die een lijn niet meer dan één keer doorlopen.

N.B. Bij onderdelen c) en d) mag U de Euler Stellingen gebruiken.

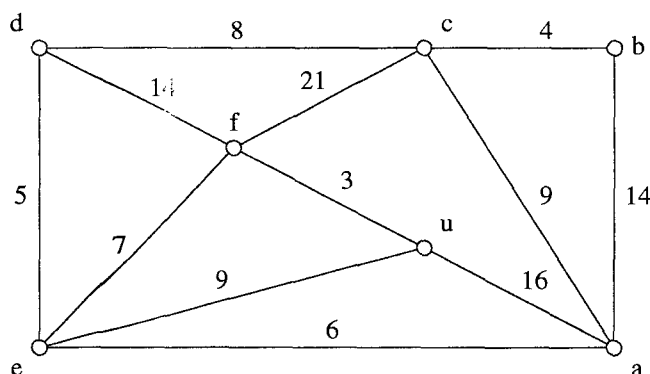
2. Afstandsgrafen en de Dijkstra Algoritme

a) (Algemene kennis)

- 1) Wat is een *opspannende boom* in een samenhangende graaf G ?
- 2) Wat bedoelt men met de *afstand* tussen twee punten x, y in een samenhangende gewogen graaf G ?
- 3) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* van een samenhangende gewogen graaf G ?

b) Beschrijf de *algoritme van Dijkstra* voor het korste-pad probleem in een samenhangende gewogen graaf.

c) Bepaal met dit algoritme de korste-paadenboom vanuit het punt u in bijgevoegde graaf. Geef hierbij een volledige boekhouding en beschrijf het gevonden korste pad $u \rightarrow b$ en zijn lengte.



Neem deze graaf zorgvuldig over op uw tentamenblad, of gebruik de figuur op het multiple-choice blad.

3. Toewijzingen in een tweedelingsgraaf $(V_1, V_2; E)$

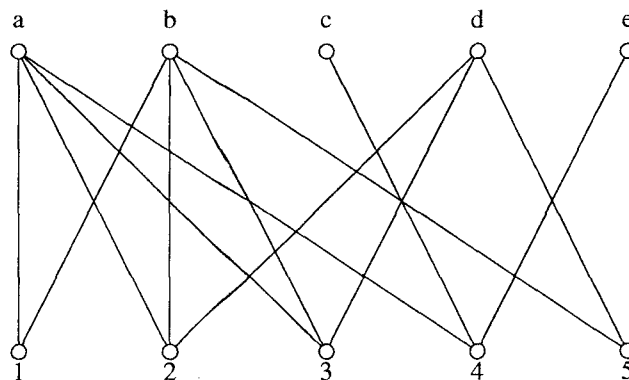
a) (Algemene kennis)

- 1) Wat bedoelt men met een *toewijzing* van een verzameling $W \subseteq V_1$ in V_2 ?
- 2) Wat bedoelt men met een *overdekking* van een graaf?
- 3) Welk verband is er tussen beide in tweedelingsgrafen?

b) Formuleer de *Stelling van Hall (Huwelijksstelling)* over toewijzingen in een tweedelingsgraaf. Wat bedoelt men met *burentekort* en hoe kun je de Stelling van Hall aanpassen ingeval van burentekort?

c) Wat verstaat men onder de *Hongaarse Methode*? Geef een beknopte beschrijving van deze algoritme.

d) Zoek met bovengenoemde methode een maximum toewijzing in volgende graaf (figuur). Hierbij is $V_1 := \{a, b, c, d, e\}$ en $V_2 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Begin met de koppeling F , bestaande uit de lijnen $a-1, b-2, c-4, d-3$. Bepaal langs deze weg het burentekort en geef de bijhorende verzameling $W^* \subseteq V_1$. (Goede toelichting scoort.)



Neem deze graaf zorgvuldig over op uw tentamenblad, of gebruik de figuur op het multiple-choice blad.

e) Beschrijf een minimum overdekking van de graaf uit d). (Goede toelichting scoort.)

Normering:

1a:	5	2a:	4	3a:	4	4:	21
1b:	4	2b:	6	3b:	4		
1c:	7	2c:	10	3c:	6		
1d:	7			3d:	8		
				3e:	4		
	23		20		26		21

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: -4ptn per fout antwoord

$$\text{TOTAAL} = 90; \quad \text{CIJFER} = \frac{\text{TOTAAL}}{10} + 1$$

Naam:

Studierichting en jaar:

28-03-02

4. Multiple-choice gedeelte

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag één alternatief juist en volledig

4.1. Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf

- o een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
- o een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
- o een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
- o een Eulertoer te vinden van minimaal gewicht.

4.2. Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf zonder lussen, waar

- o tussen elk tweetal punten ten minste één pijl voorkomt.
- o tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
- o tussen elk tweetal punten ten hoogste één pijl voorkomt.
- o tussen elk tweetal punten in beide richtingen één pijl voorkomt.

4.3. Onder een centroïdaal punt van een boom verstaat men

- o Een punt van de boom dat even ver van alle eindpunten ligt.
- o Een punt met takken van maximum gewicht.
- o Een punt waarvan de zwaarste tak de lichtste is onder alle punten.
- o Het zwaartepunt van de boom wanneer aan elke lijn een gewicht 1 wordt toegekend.

4.4. De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is

- o de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
- o de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p .
- o de netto stroom over een snede tussen b en p .
- o de grootste hoeveelheid stroom die door één pijl gaat.

4.5. De stelling van Berge-Petersen betreffende koppelingen in een graaf zegt:

- o Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- o Een koppeling F is maximaal precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

4.6. Een nette lijnkleuring van een graaf $G = (V, E)$ is gedefinieerd als

- o Een toekenning van kleuren aan de lijnen in E , zo dat geen lijn twee verschillende kleuren krijgt.
- o Een kleuring van de lijnen uit E zo dat aangrenzende lijnen een verschillende kleur hebben.
- o een opdeling van E in volledige koppelingen (die als "kleuren" worden gezien).
- o een lijnkleuring zo dat elke kleur in elk punt aanwezig is.

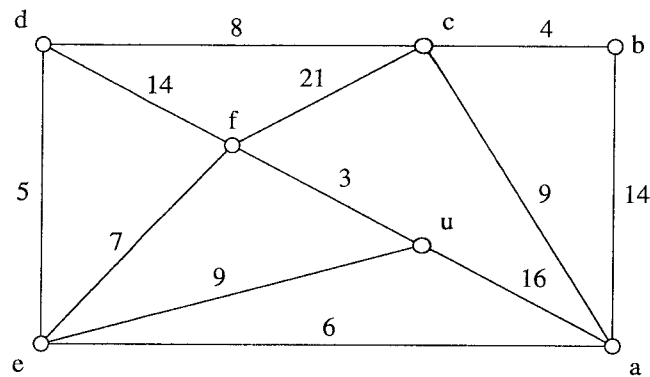


Fig: graaf bij opgave 2

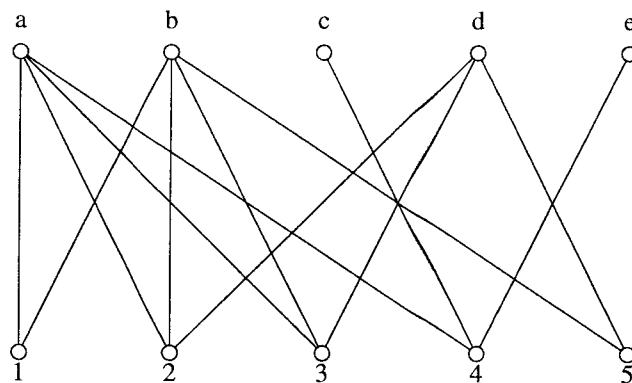


Fig: graaf bij opgave 3