

Tentamen Discrete Wiskunde 14-08-00

Ieder maakt de sommen die bij haar/zijn studierichting horen

Econometristen kiezen voor INF of voor BWI (niet mengen!)

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Toernooien [BWI]

- (a) Wat verstaat men onder een *Hamilton pad* in een graaf, een *gericht Hamilton pad* in een *gerichte graaf*, en onder een *toernooi*?

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	0

- (b) Beschrijf de algoritme waarmee je een gericht pad in een toernooigraaf kunt uitbreiden tot een gericht pad met één punt meer.

- (c) Construeer, volgens deze algoritme en mét toelichting, een Hamilton pad in de gerichte graaf, voorgesteld door de gegeven verbindingsmatrix.

2. Latijnse vierkanten [INF-WIS]

- (a) Wat verstaat men onder een *latijnse rechthoek* en wat verstaat men onder een *latijns vierkant*?
- (b) Geef een voorbeeld van een latijnse 2×5 rechthoek met eerste rij (1 3 5 2 4), en licht aan de hand van dit voorbeeld toe hoe je een latijnse rechthoek kunt modelleren in een koppelings- of nette lijnkleurings-probleem met tweedelingsgrafen.
- (c) Formuleer de stelling over nette lijnkleuringen waarmee je kunt afleiden dat elke latijnse rechthoek kan worden voortgezet tot een latijns vierkant.
- (d) Geef zo'n voortzetting voor je rechthoek in (b). Geef ook het grafische model van je oplossing.

3. Recurrente betrekkingen [ALLEN]

- (a) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4)$$

- (b) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte n . Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen noemen we a_n . Geef a_1 , a_2 en a_3 . Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n . U hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Inclusie-exclusie principe [ALLEN]

- (a) Geef, met toelichting van alle gebruikte symbolen, een beschrijving van het principe van inclusie en exclusie. U hoeft geen bewijs te geven van de formule.
- (b) Hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 zijn deelbaar door 5 en hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 zijn deelbaar door 7?
- (d) Bepaal met het principe van inclusie en exclusie hoeveel getallen van 1 tot en met 1000 niet deelbaar zijn door 5, 6, of 7. Geef alle tussenresultaten duidelijk aan.

5. Coderingstheorie en vectorruimten [ALLEN] We werken met de woordruimte $W := \{0,1\}^7$, dit is, een vector ruimte over $\{0,1\}$ van dimensie 7.

- (a) Wat verstaat men onder de *Hamming-afstand tussen twee woorden* $w_1, w_2 \in W$ en wat verstaat men onder de *bol om het nulwoord met straal r* ? Hoeveel elementen bevat die bol als de straal $r = 1, 2, 3$?
- (b) We beschikken over de volgende 0/1-matrix G :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laat zien dat de vier rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn in W .

- (c) Controleer dat de vector $(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ loodrecht staat op elk van de vier rijen van G .
- (d) Bekijk nu de matrix G als de generator matrix voor een lineaire binaire code C . Wat verstaat men onder een bijhorende *check matrix* H ? Geef zo'n check matrix.
- (e) Ik ontvang onder deze code C het woord $w := (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$. Welk woord werd (volgens maximum likelihood decoding) verstuurd?

NORMERING:

1a:	4	2a:	3	3a:	10	4a:	4	5a:	3
1b:	5	2b:	5	3b:	8	4b:	3	5b:	3
1c:	9	2c:	5			4c:	11	5c:	4
		2d:	5					5d:	4
								5e:	4
									4
	18		18		18		18		18

Voor het Multiple-choice gedeelte (6 vragen) geldt:

Aantal punten = 3 * aantal goede antwoorden

$$\text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$

Naam:

Studierichting en jaar:

14-08-00

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd. In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

6. [BWI] Een graaf $G = (V, E)$ is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als

- G geen oneven cykels bevat.
- G geen even cykels bevat.
- G precies twee componenten heeft.
- G het komplement is van een samenhangende graaf.

7. [ALLEN] Een netwerk is

- een gerichte graaf waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
- een gerichte graaf waarin aan elk punt een positief getal (de puntcapaciteit) is toegekend.
- een gerichte graaf waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.
- een gerichte, sterk samenhangende, graaf met een bron en een put.

8. [ALLEN] De stelling van Berge-Petersen zegt:

- Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
- Een koppeling F is maximaal precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

9. [ALLEN] De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
- $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
- $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
- $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .

10. [ALLEN] Een Ferrer diagram is een schematische voorstelling van een partitie

- waarbij ieder deel van de partitie wordt weergegeven door de punten van een rij en de rijen in volgorde van niet-toenemende grootte zijn gerangschikt aan de linker marge.
- door middel van een tweedelingsgraaf met de leden van de partitie in het ene deel, de elementen in het andere deel, en een lijn tussen een verzameling en elk van haar elementen.
- door middel van een volledige graaf, met de delen van de partitie als vertices.
- door middel van de formule $x_1 + \dots + x_k = n$, waarbij n het totale aantal elementen is, en x_i het aantal elementen in het i -de deel.

11. [ALLEN] Welk van de volgende problemen is een voorbeeld van een k -herhalingscombinatie van n elementen?

- ☒ Het aantal woorden met k symbolen uit het alfabet ($k \leq n = 26$)
- ☐ Het aantal mogelijkheden om k identieke brieven in n verschillende brievenbussen te stoppen (k, n willekeurig)?
- ☒ Het aantal mogelijke weddenschappen op de eerste k plaatsen in een race met n paarden ($k \leq n$)?
- ☐ Het aantal comités van k personen samengesteld uit n kandidaten ($k \leq n$).
- ☐ Geen van deze.

12. [INF-WIS] De Hongaarse Methode betreft de konstruktie van

- ☐ een maximale wisselboom in een tweedelingsgraaf.
- ☒ een maximum toewijzing in een tweedelingsgraaf.
- ☐ een maximum stroom in een netwerk.
- ☐ een minimum opspannende boom in een gewogen graaf.