

Tentamen Discrete Wiskunde 13-06-00

Dit tentamen wordt uitsluitend gemaakt door studenten INF en WIS.

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Koppelingen en het koppelspel

- Leg uit: **maximum koppeling**, **maximale koppeling**, **volledige koppeling**, in een graaf $G := (V, E)$.
- Wat bedoelt men precies met een F -**vergroterend wisselpad** in een graaf $G := (V, E)$ met koppeling F ? Formuleer de **stelling van Berge-Petersen** die over dit onderwerp handelt.
- Twee spelers kiezen om beurt een nieuw punt in een graaf $G := (V, E)$. Na het eerste punt dient elk punt zó gekozen te worden, dat het verbonden is met het vorige gekozen punt. Degene die geen punt meer kan kiezen verliest. Naargelang de graaf, en naargelang je mag beginnen of niet, bestaat een strategie die winst verzekert. Leg deze strategie uit, geef aan wanneer en hoe ze kan worden toegepast, en geef het verband met de stelling van Berge-Petersen aan.

2. Tellen

- Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

- Aan vier personen wordt gevraagd een cijfer van 1 tot 9 te noemen. Hoe groot is de kans dat een cijfer meer dan eens genoemd wordt? Argumenteer je antwoord.
- Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

3. Recurrente betrekkingen en genererende functies

- Stel een recurrente betrekking op voor het aantal mogelijkheden a_n om een rij van n bits te maken waarin geen twee nullen na elkaar optreden.
- Los de recurrente betrekking $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$ op onder de beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = -5/2$.
- We verdelen rode en blauwe knikkers over vier verschillende bakjes, en wel zo dat elk bakje tenminste één rode knikker bevat en een even aantal blauwe knikkers. Op de kleur na zijn de knikkers eender. Bepaal de genererende functie voor dit probleem, en bepaal hiermee het aantal oplossingen als er 7 knikkers verdeeld zijn.

4. Lineaire ruimten [INF]

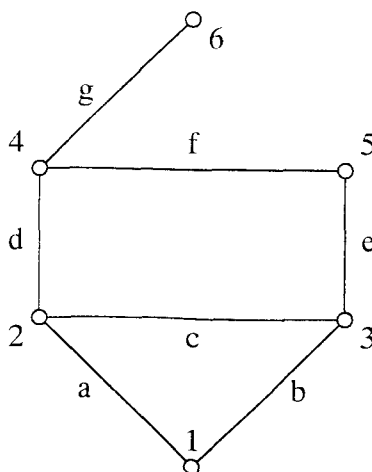
- Wat is een **primitief element** van een lichaam $\mathbb{F}$? Zoek methodisch een primitief element van het lichaam $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.
- Hoeveel elementen heeft de vector ruimte $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]/(X^3+2)$ van veeltermen over $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ modulo X^3+2 ?
- Bepaal het inwendig product van de vectoren $(-3, 2, 0, 5)$ en $(6, 4, 2, -2)$ in de vectorruimte $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^4$.
- In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$ is gegeven de drie bij zeven matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dit geeft een operator $\{-1, 0, 1\}^7 \rightarrow \{-1, 0, 1\}^3$ op de gebruikelijke wijze. Bepaal met toelichting de dimensie van de beeldruimte (kolomruimte) en van de nulruimte van deze operator.

5. Matroiden [WIS]

- Leg uit: **basis**, **circuit**, **vlak (flat)**, **hul operator** van een matroide $M := (E, \mathcal{I})$. Hoe kun je de onafhankelijke verzamelingen $\mathcal{I}$ terugvinden wanneer je alleen de bases, resp. de circuits, resp. de hul operator, kent?
- Wat is de **grafische matroide** van een graaf $G = (V, E)$?
- Wat is de **co-grafische matroide** van een graaf $G = (V, E)$?
- Gegeven de graaf uit bijhorende figuur, geef een basis en een circuit horend bij de grafische matroide en geef een basis en een circuit horend bij de co-grafische matroide.



Naam:

Studierichting en jaar:

13-06-00

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist en volledig.

6. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
 - o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
 - o bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
 - o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
7. Het optimale-toewijzingen probleem in een gewogen tweedelingsgraaf G heeft betrekking tot:
- o Het toewijzen van een snede van G met minimaal gewicht.
 - Het vinden van een volledige koppeling (toewijzing) in G van minimum gewicht.
 - o Het vinden van een vergrotend wisselpad van minimum gewicht.
 - o Het bepalen van een minimum-gewicht overdekking van G .
8. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
 - o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
 - o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
 - o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
9. Het uitgebreide binomium van Newton werd ingevoerd als een formule voor
- o $(x_1 + x_2)^n$ (waar $n \geq 0$ geheel en x_1, x_2 reëel).
 - o $(x_1 + \dots + x_k)^2$ (waar $k \geq 2$ geheel).
 - o $\frac{1}{(a+b)^n}$ (waar $n \geq 0$ geheel).
 - o $(a+b)^r$ (waar r reëel).
10. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal n in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius functie is correct:
- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
 - o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
 - o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
 - o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.

13/06/00

11. Een perfect 3 fouten verbeterende code is een code waarbij

- ☐ voor ieder woord met precies drie fouten een codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- ☐ voor ieder woord met ten hoogste drie fouten een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- ☐ voor ieder woord een uniek codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.
- ☐ voor ieder woord een codewoord bestaat op afstand ten hoogste drie.

NORMERING:

1a:	4	2a:	6	3a:	5	4a:	6	5a:	5
1b:	5	2b:	6	3b:	6	4b:	3	5b:	4
1c:	9	2c:	6	3c:	7	4c:	3	5c:	4
1d:	<u> </u>	2d:	<u> </u>	3d:	<u> </u>	4d:	<u>6</u>	5d:	<u>5</u>
	18		18		18		18		18

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt:

Aantal punten = 18 - 4 * aantal foute antwoorden of 0

$$\text{CIJFER} = \frac{\text{SOM}}{10} + 1$$