



Tentamen Discrete Wiskunde 7-1-99
Dit tentamen is voor studenten WSK en INF.

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Optimale toewijzingen

Zoek in de volgende kostenmatrix methodisch naar een minimale toewijzing.

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 21 & 19 & 15 \\ 22 & 13 & 18 & 24 & 30 \\ 16 & 27 & 15 & 21 & 17 \\ 14 & 17 & 19 & 17 & 17 \\ 12 & 22 & 13 & 13 & 31 \end{pmatrix}$$

2. Een recurrente betrekking

Iemand heeft een onuitputtelijke voorraad even grote rode, witte, en blauwe vierkante tegels en wil daarmee een tuinpad aanleggen zó dat twee tegels van dezelfde kleur niet met een zijde tegen elkaar aanliggen.

a) Zij p_n het aantal toegelaten paden van twee tegels breed en n tegels lang. Laat zien dat $p_1 = 6$ en (algemener) dat $p_n = 2 \cdot 3^n$ voor $n \geq 1$.

b) Laat zien dat voor $n > 2$ de recurrente betrekking

$$c_n = 5c_{n-1} - 2c_{n-2}$$

geldt. Bepaal tevens c_1 en c_2 .

Aanwijzing bij b): Het pad wordt per rij van drie gelegd. Laat a_n het aantal paden van lengte n zijn dat eindigt in een rij met drie verschillende kleuren en laat b_n het aantal paden van lengte n zijn dat eindigt in een rij met maar twee verschillende kleuren. Druk nu a_n en b_n uit in eerdere a 's en b 's.

c) Geef de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit het vorige onderdeel.

d) Zij $C(x)$ de genererende functie van de rij getallen c_n . Geef een "gesloten" uitdrukking voor $C(x)$ in de vorm van een breuk.

3. Formele machtreeksen en genererende functies

a) Laat met behulp van genererende functies zien dat elk natuurlijk getal op precies één manier te schrijven is als som van verschillende machten van 2.

b) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$a_{n+1} = 2 \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \quad (a_0 = 1),$$

door een vergelijking op te stellen voor de bijbehorende genererende functie.

4. Inclusie/Exclusie

a) Let uit wat het principe van Inclusie/Exclusie inhoudt. Geef daarbij de relevante formules en de betekenis van de gebruikte symbolen.

b) Hoeveel permutaties van de getallen $1, 2, \dots, 6$ zijn er waarbij de combinaties 12, 34 en 56 niet voorkomen?

c) Geef een formule voor het aantal permutaties van de getallen $1, 2, \dots, 2n$, waarbij de combinaties $12, 34, \dots, (2n-1, 2n)$ niet voorkomen.

NORMERING:

1: 9; 2a: 2, b: 3, c: 2, d: 2; 3a: 4, b: 4; 4a: 3, b: 3, c: 3.

Voor het Multiple-choice gedeelte geldt: Aantal goede punten = aantal goede antwoorden * 2, Cijfer = Som/5 + 1.

Naam:

Studierichting en jaar:

7-1-99

- Dit blad moet met de overige tentamenkopij worden ingeleverd
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist en volledig

5. De geheeltallige stroomstelling stelt dat in een netwerk met geheeltallige capaciteiten en met een bron en een put

- o er een maximum stroom bestaat die geheeltallig is.
- o uitsluitend geheeltallige stroomsterktes kunnen optreden.
- o elke stroom die niet geheeltallig is kan worden verhoogd tot een geheeltallige stroom.
- o de stroomsterkte van iedere maximum stroom geheeltallig is.

6. Het lijnkleuringsgetal van een graaf is

- o het maximale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het minimale aantal kleuren waarmee de lijnen van de graaf netjes kunnen worden gekleurd.
- o het aantal volledige koppelingen (=kleuren) waarin de lijnen van de graaf kunnen worden opgedeeld
- o het grootste aantal lijnen dat dezelfde kleur kan krijgen in een nette lijnkleuring.

7. Zij $G = (V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is

- o een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigd.
- o een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
- o een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
- o een verzameling B van burens van W zo dat $|B| \geq |W|$.

8. Welk van de volgende problemen is een voorbeeld van een k -herhalingscombinatie van n elementen?

- o Het aantal woorden met k symbolen uit het alfabet ($k \leq n = 26$).
- o Het aantal mogelijkheden om k identieke brieven in n verschillende brievenbussen te stoppen ($k \leq n$).
- o Het aantal mogelijke weddenschappen op de eerste k plaatsen in een race met n paarden ($k \leq n$).
- o Het aantal comités van k personen samengesteld uit n kandidaten ($k \leq n$)
- o Geen van deze.

9. Het laatjesprincipe ("pigeon-hole principle") stelt dat

- o als elk laatje ten minste één object bevat, dan is het totale aantal objecten $\geq$ het aantal laatjes.
- o als elk laatje ten hoogste één object bevat, dan is het totale aantal objecten $\leq$ het aantal laatjes.
- o als er méér objecten zijn dan laatjes, dan is er een laatje met méér dan één object.
- o als er méér laatjes zijn dan objecten, dan is er ten minste één laatje leeg.
- o geen van deze.