# Tentamen Discrete Optimalisering

26-03-2013, 12:00u - 14:00u

**Puntentoekenning**

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, waaruit 40 punten te behalen zijn.

| *Opgave* | *A* | *B* |
|---|---|---|
| Opg. 1 | 3 | 7 |
| Opg. 2 | 10 | - |
| Opg. 3 | 10 | - |
| Opg. 4 | 10 | - |

$$\text{Eindcijfer} = \max\{1, \text{puntentotaal}/4\}$$

## Opgave 1: Branch & Bound

Beschouw het volgende knapzak probleem.

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \textit{onder}: & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

**1A)** Geef de unieke oplossing van de LP-Relaxatie van dit probleem. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde van de LP-Relaxatie.

**1B)** Los het bovenstaande 0-1 knapzak probleem op met behulp van Branch en Bound en vind op deze manier de optimale oplossing met de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

## Opgave 2: Geheeltallige Programmering

De CEO van een operations research bedrijf, ene Desmond C., heeft een lijst gemaakt van $M$ langlopende ontwikkelingsprojecten, genummerd van 1 t/m $M$, en hij wil een planning maken voor de komende $N$ jaar, jaren 1 t/m $N$, om een selectie van deze projecten te starten. Hij heeft voor elk van deze projecten de kosten geschat, precies gezegd: project $i$ draagt kosten $c_{i,j}$ euro met zich mee in het $j$-de ontwikkelingsjaar van het project $i$, dus als project $i$ begin jaar $\tau$ van start gaat, zijn de kosten voor project $i$ in jaar $t$ precies $c_{i,t-\tau+1}$ euro voor $t \geq \tau$. Er is een budget van $b_t$ beschikbaar in jaar $t$, $t = 1, \ldots, N$. Deze jaarlijkse budgetten mogen niet overschreden worden. Verder kan project 9 pas eventueel van start gaan als project 8 al minstens een jaar geleden van start is gegaan. Tenslotte moeten projecten 1, 2 en 3 tegelijk van startgaan indien er besloten wordt minstens 2 van deze projecten uit te voeren. De benodigde looptijd om project $i$ af te ronden bedraagt $L_i$ jaar, $i = 1, \ldots, M$, en aan het eind van het $N$-de jaar moeten er minstens $K$ projecten zijn afgerond. De waarde van project $i$ wordt gemeten via een zogenaamde appreciatie waarde door de werknemers, deze waardering is $a_i$ als

project $i$ wordt uitgevoerd. Als een project $i$ echter niet uitgevoerd wordt moet er boete $d_i$, de zogenaamde depreciatie waarde, worden afgetrokken. De vice-president wil zijn werknemers zo tevreden mogelijk houden en wil daarom de netto waardering, dat is som van de waarderingen minus de som van de boetes, zo hoog mogelijk hebben. Hij vraagt zich daarom af welke projecten er gestart moeten worden en wanneer deze dan gestart moet worden.

Formuleer het bovenstaande probleem als een geheeltallig lineair programmerings probleem. Geef duidelijk de betekenis van de gekozen beslissingsvariabelen aan.

## Opgave 3: Netwerk problemen

De rijen van de volgende tabel representeren personen en de kolommen representeren jobs. Een getal in rij $i$ en kolom $j$ geeft aan wat de kosten zijn indien persoon $i$ job $j$ doet. Los het toewijzingsprobleem op. Laat daarbij duidelijk de stappen zien die je maakt om tot de oplossing te komen.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 2 | 5 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 |
| 4 | 5 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 5 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |

## Opgave 4: Dynamische Programmering

Dieuwertje K. moet voor volgende periode nog een keuze maken uit een collectie van $N$ keuzevakken (genummerd van 1 tot en met $N$). Elk vak vereist een bepaalde voorbereidingstijd, levert een aantal studiepunten op en heeft een gegeven moeilijkheidsgraad. Precies geformuleerd: vak $j$ kost Dieuwertje een tijd $t_j$ in uren aan voorbereiding, levert haar $p_j$ studie punten op en wordt door stafleden beoordeeld als een categorie $c_j$ vak, waarbij $c_j$ een geheel getal is tussen 1 en 10 (1 is zeer eenvoudig; ... ; 10 is heel moeilijk].
Volgens het studieprogramma moet Dieuwertje nog minstens $Q$ studiepunten halen. Dieuwertje wil aan alle vakken tezamen niet meer dan $T$ uur aan voorbereiding besteden. We gaan er vanuit dat Dieuwertje voor elk vak slaagt. Omdat Dieuwertje een mooie lijst vakken op haar CV wil kunnen presenteren stelt zij haarzelf eerst de vraag, welke vakken zij in de volgende periode moet opnemen om te bereiken dat de som van de moeilijkheidsgraden van de gekozen vakken maximaal is.
Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie.
*Hint: Begin met stadium $j$ en realiseer je dat je twee componenten moet bijhouden in je toestand, de ene is $p$, het minimale resterende aantal nog te behalen studie punten!*