

Tentamen Differentiëren en Integreren 3

26 maart 2014, 12:00-14:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 vragen.
 - Het totale aantal punten is 36.
 - Cijfer = $\frac{\text{Aantal punten}}{4} + 1$.
 - Motiveer altijd je antwoord.
 - Formulebladen, rekenmachines en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
1. [6 punten] Bereken de oppervlakte-integraal $\iint_{\mathcal{S}} z dS$, met $\mathcal{S}$ het deel van het vlak $2x + 2y + z = 2$ dat in het eerste octant ligt.
 2. Laat $\mathcal{S}$ het gehele oppervlak van de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$ zijn met oriëntatie naar buiten. Het oppervlak $\mathcal{S}$ bestaat uit twee stukken: de halve bolschil (*hemisphere*) $\mathcal{S}_1$ en een oppervlak $\mathcal{S}_2$ op het xy -vlak. Laat $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. We gaan de flux-integraal $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$ op twee verschillende manieren uitrekenen:
 - a) [6 punten] Bereken direct $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$ zonder gebruik te maken van integraalstellingen uit de vectorcalculus.
 - b) [6 punten] Bereken $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$ m.b.v. de divergentiestelling.
 3. Beschouw het vectorveld
$$\mathbf{F} = e^{xyz}(x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}).$$
 - a) [4 punten] Laat zien dat $\mathbf{F}$ divergentievrij (*solenoidal*) is.
 - b) [4 punten] Toon aan dat $\mathbf{G} = e^{xyz}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ een vectorpotentiaal voor $\mathbf{F}$ is.
 4. [4 punten] Bereken de oppervlakte van het begrensde gebied R in $\mathbb{R}^2$ waarvan de rand gegeven wordt door de kromme $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$, met $0 \leq t \leq \pi$.
 5. [6 punten] Laat $\mathcal{S}$ het deel van de bolschil (*sphere*) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$ boven het xy -vlak zijn, met oriëntatie naar buiten. Laat $\mathbf{F} = (e^x - 4yx^2, (4x+1)y^2 + e^y, (x^3 + y^3)e^z)$. Bereken $\iint_{\mathcal{S}} \text{curl } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$. (*Aanwijzing*: gebruik hierbij een of meer integraalstellingen uit de vectorcalculus)