

Gebruik van rekenmachines, laptops, formulebladen, boeken etc. is **niet** toegestaan.
Motiveer al je antwoorden en schrijf duidelijk. Succes!

1. (i) Schets het integratiegebied en bereken, door verwisseling van integratievolgorde, de herhaalde integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx dy.$$

- (ii) Het gebied $S \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door:

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x, \text{ én } x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Bereken:

$$\int \int_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA.$$

2. (i) Gebruik bolcoördinaten om de integraal

$$\iiint_B e^{-\rho^3} dV$$

te berekenen, waarbij B de bol met straal a en middelpunt in $(0, 0, 0)$ is.

- (ii) Beschouw de limiet $a \rightarrow \infty$ om te bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \frac{4}{3}\pi.$$

3. (i) Bepaal voor welke waarden van a en b het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = (ax^2y + 3z)\hat{i} + x^3\hat{j} + (bx + z)\hat{k}$$

conservatief is en vind een potentiaalfunctie.

- (ii) Bereken, voor de bij (i) gevonden waarden van a en b ,

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds,$$

waarbij C het beeld is van de geparametriseerde kromme

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3 - 2\cos t - \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Zij K de (massieve) kegel met top in het punt $(0, 0, 1)$ en als basis de cirkelschijf $S_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } z = 0\}$. De rest van de rand van K duiden we aan met S_2 . Zowel S_1 als S_2 zijn voorzien van de naar buiten gerichte normaal. Gegeven zijn de vectorvelden $\vec{F}$ en $\vec{G}$:

$$\vec{F} = (x + y^2)\hat{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\hat{j} + (z + 1)\hat{k},$$

$$\vec{G} = y \hat{i} - x \hat{j} + z \hat{k}.$$

Bereken achtereenvolgens:

(i)

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS;$$

(ii)

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dV;$$

(iii)

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS$$

(iv)

$$\iint_{S_2} \operatorname{curl} \vec{G} \cdot \hat{N} \, dS.$$

Normering: 1) 2 punten, 2) 2 punten, 3) 2 punten, 4) 4 punten.