

Faculteit der Exacte Wetenschappen	tentamen Differentiëren en Integreren 2
	voor studenten Wiskunde en Natuurkunde
Afdeling Wiskunde	14-12-2009
Vrije Universiteit	15:15 - 17:15 uur

Normering:

1a:3	2:4	3a:2	4a:3	5a:3	6:4
b:3		b:2	b:3	b:3	
		c:3	c:3	c:3	
		d:3		d:2	

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}+1}{5}$$

Het gebruik van het boek, aantekeningen, formulebladen of een (grafische) rekenmachine bij het tentamen is niet toegestaan.

- Bereken $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$ of laat zien dat de integraal divergeert.
 - Toon aan dat de integraal $\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + x^{\frac{1}{3}}} dx$ convergent is.
- In de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ worden de vlakken V en W gegeven door de vergelijkingen $z = a$ en $z = b$. Hierbij is $-1 \leq a \leq b \leq 1$. Toon aan dat de oppervlakte van het deel van de bol met straal 1, welke tussen de beide vlakken V en W ligt, alleen afhankelijk is van het verschil $b - a$.
- Gegeven zijn het punt $P = (1, -2, 1)$ en de lijn $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$. Hierbij is $\vec{r}_0 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ en $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.
 - Bepaal een vergelijking voor het vlak, dat loodrecht op de lijn staat en door het punt P gaat.
 - Bereken het snijpunt van de lijn en het vlak.
 - Bereken de kortste afstand van het punt P tot de lijn.
 - Bepaal twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{w}$ met $\vec{u}$ loodrecht op $\vec{w}$ en beiden loodrecht op de lijn $\vec{r}(t)$.

Z.O.Z

4. Gegeven is de kromme $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ voor $t \geq 0$.
 Hierbij is $x(t) = \sqrt{3}(\frac{1}{2}t^2 + t)$, $y(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$ en $z(t) = \frac{1}{2}t^2 - t$.
- Bepaal de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ en de absolute snelheid $v(t)$.
 - Bepaal de booglengte s van de kromme van 0 tot t , als functie van t en druk t uit in s .
 - Bepaal de eenheidsraakvector $\vec{T}(s)$ voor $s = 3$.
5. Gegeven is de functie $f(x, y) = xy^5$
- Bepaal de gradiënt $\vec{\nabla} f(2, 1)$ en de richtingsafgeleide van f in de richting $\vec{i} - \vec{j}$ in het punt $P = (2, 1)$.
 - Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(2, 1, 2)$.
 - De gradiënt $\vec{\nabla} f$ is een 2-dimensional vectorveld. Bepaal de veldlijn van het vectorveld, die door het punt $(2, 1)$ loopt, en bepaal een raakvector van de veldlijn in het punt $(2, 1)$.
 - Is het vectorveld $\vec{\nabla} f(x, y) + 2x\vec{j}$ ook conservatief?
6. Zij $G \subset \mathbb{R}^2$ het gebied, dat wordt begrensd door de lijnen $x = 1$, $y = 0$ en de kromme $x = y^{\frac{1}{4}}$. Bereken de dubbele integral

$$\iint_G \sqrt{1 - x^5} \, dA.$$