

Faculteit der Exacte Wetenschappen	tentamen Differentiëren en Integreren 2 voor studenten Wiskunde en Natuurkunde
Afdeling Wiskunde	19-12-2008
Vrije Universiteit	08:45-10:45 uur

Normering:

$1a : 2;$ $2a : 2;$ $3 : 4;$ $4a : 2;$ $5a : 2;$ $6a : 2;$ $7 : 3$
 $b : 3;$ $b : 2;$ $b : 3;$ $b : 3;$ $b : 3;$
 $c : 2;$ $c : 3.$

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

- Bereken voor $x > 0$ de functie $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{t + t^3} dt$.
 - Bereken $\int_4^\infty \frac{\sqrt{t} dt}{(\sqrt{t} - 1)^3}$ of laat zien dat de integraal divergeert.
 - Toon aan dat de integraal $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})}$ convergent is.
- Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ en het punt $P_0 = (1, 2, 3)$.
 - Bepaal een vector die loodrecht op $\mathbf{v}$ én loodrecht op $\mathbf{w}$ staat.
 - Het vlak V wordt gegeven door de vergelijking $-x + y + z = 4$ en het vlak W heeft de vergelijking $-x - y + 2z = 3$. Toon aan dat het punt P_0 in beide vlakken ligt. Schrijf de snijlijn van V en W in de vorm $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}$, waarbij $\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{u}$ vectoren zijn en t een parameter is.
- De kromme $\mathcal{C}$ wordt in poolcoördinaten gegeven door $r = \sqrt{2 \sin 2\theta}$, voor $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat binnen $\mathcal{C}$ ligt maar buiten de cirkel met straal 1 om het punt $(0, 0)$.
- Gegeven is de parameterkromme $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ in de drie dimensionale ruimte. Hierbij is $x(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$, $y(t) = \frac{2}{3} t \sqrt{t}$, en $z(t) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi t)$ voor $t \geq 0$.
 - Bepaal de snelheidsvector $\mathbf{v}(t)$ en toon dat de absolute snelheid $v(t) = \sqrt{t + 1}$ is.
 - Bepaal de lengte $s(t)$ van de kromme tussen de parameterwaarden $t = 0$ en t . Laat zien dat de parameter t en de lengte s voldoen aan $\frac{3}{2}s + 1 = (t + 1)^{\frac{3}{2}}$.
 - Bepaal de eenheidsraakvector $\hat{T}(s)$ aan de kromme $\mathbf{r}(t)$ voor het punt waar $s = \frac{14}{3}$.

Z.O.Z.

5. Gegeven is de functie $\phi(x, y) = x\sqrt{y}$.
- a) Bepaal de gradiënt $\nabla\phi(x, y)$ van $\phi(x, y)$.
 - b) Bepaal de veldlijn in het (x, y) -vlak van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + \frac{x}{2\sqrt{y}}\mathbf{j}$ die door $(1, 1)$ loopt.
6. Gegeven zijn de vectorvelden $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + xz)\mathbf{k}$ en $\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + xz\mathbf{k}$.
- a) Toon aan dat $\mathbf{F}(x, y, z)$ niet conservatief is.
 - b) Toon aan dat $\mathbf{G}(x, y, z)$ wel conservatief is door een potentiaal voor $\mathbf{G}(x, y, z)$ te bepalen.
7. Zij G het gebied in het eerste quadrant dat wordt begrensd door de lijnen $x = 0$, $y = 1$ en de kromme $x = y^2$. Zij $f(x, y) = xe^{y^5}$. Bereken

$$\iint_G f(x, y) \, dA.$$