

Tentamen Deterministische Optimalisering

Blok 1, vraag 1 t/m 3, 22 maart 2005, 12.00-13.30

Blok 2, vraag 4 t/m 6, 22 maart 2005, 12.00-13.30

Blok 1+2, vraag 1 t/m 6, 22 maart 2005, 12.00-14.45

Opgave 1

Gegeven is het Lineaire Programmeringsprobleem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ \text{Onder} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

1a Leidt af wat de basisoplossing is behorend bij de optimale basis x_1 en x_3 . (Dit is mogelijk zonder simplex stappen uit te voeren. Het eindtableau genoemd onder 1b mag hierbij niet worden gebruikt).

Antwoord

Voor iedere basis $\mathbf{B}$ is de bijbehorende basisoplossing gelijk aan $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Voor de basis x_1 en x_3 is

$$\mathbf{B} \text{ gelijk aan } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathbf{B}^{-1} \text{ is } \begin{bmatrix} -1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aangezien } \mathbf{b} \text{ gelijk is aan } \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ volgt } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ is } \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

x_1 is dus $2/3$ en x_3 is $4/3$.

1b Hoe luidt de duale formulering van bovenstaand primale probleem.

Antwoord

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 8y_1 + 2y_2 \\ \text{Onder} & 2y_1 + y_2 \geq 7 \\ & 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ & 5y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Het eindtableau van de simplex methode horend bij bovenstaande primale formulering van het LP probleem is (x_4 is de surplus variabele horend bij de eerste restrictie en x_5 de slack variabele horend bij de tweede restrictie):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	11	0	1	9	10
x_3	0	-0,33	1	-0,33	-0,67	1,33
x_1	1	2,33	0	0,33	1,67	0,67

- 1c** Door de coëfficiënt 4 van x_2 in de doelstelling te verhogen wordt het aantrekkelijker om x_2 in de basis op te nemen. Hoe groot moet de coëfficiënt van x_2 minimaal zijn voordat x_2 in de basis wordt opgenomen.

Antwoord

Uit het eindtableau volgt dat de gereduceerde kosten van x_2 gelijk zijn aan 11. De coëfficiënt van x_2 zou dus 11 groter moeten zijn alvorens in de basis te komen. De coëfficiënt was 4. De coëfficiënt had dus minstens 15 moeten zijn opdat x_2 in de basis kwam.

- 1d** Gesteld dat de coëfficiënt rechts van het ongelijk teken in de tweede restrictie wijzigt van 2 tot 3. Met hoeveel zal de doelstellingswaarde van de optimale oplossing dan toenemen.

Antwoord

De variabele x_5 is de slack variabele van de tweede restrictie (ofwel de derde rij uit het eindtableau). In het begin tableau bestond de kolom onder x_5 uit een 1 in de derde rij en verder nullen. Per saldo is gedurende de simplex stappen de derde rij negen maal bij de eerste rij opgeteld (want daar staat nu een 9) en $-2/3$ maal van de tweede rij afgetrokken.

Als de rechterkant van de tweede restrictie verandert van 2 in 3 dan worden in het eindtableau de RHS van de doelstellingrij 9 groter en wordt deze 19.

(Dit eindtableau wordt ook daadwerkelijk bereikt omdat de andere RHS positief blijven).

Opgave 2

- 2a** Gegeven is het geheeltallig programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & x_1 + x_2 \\
 \text{Onder} & 6x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \text{ en geheel}
 \end{array}$$

Vindt een snede (valid inequality) met de methode van Gomory.

Antwoord

Los eerst de LP relaxatie op van bovenstaand probleem.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	-1	-1	0	0	0
x_3	6	2	1	0	12
x_4	3	4	0	1	12

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	0	-2/3	1/6	0	2
x_1	1	1/3	1/6	0	2
x_4	0	3	-1/2	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	0	0	1/18	2/9	3 1/3
x_1	1	0	2/9	-1/9	4/3
x_2	0	1	-1/6	1/3	2

De optimale oplossing van de LP relaxatie is dus niet geheeltallig. We kunnen nu een snede maken op basis van de tweede vergelijking uit het eindtableau

$$x_1 + 2/9 x_3 - 1/9 x_4 = 4/3$$

Deze is te herschrijven tot

$$x_1 + (0 + 2/9) x_3 + (-1 + 8/9) x_4 = 1 + 1/3$$

$$x_1 - x_4 - 1 = 1/3 - 2/9 x_3 - 8/9 x_4$$

Aangezien het rechterlid nooit 1 of groter kan worden, volgt dan

$$x_1 - x_4 - 1 \leq 0 \text{ of } x_1 - x_4 \leq 1$$

Hieruit kun je x_4 elimineren. Uit het oorspronkelijke probleem weten we dat

$$x_4 = 12 - 3x_1 - 4x_2$$

De toe te voegen restrictie ($x_1 - x_4 \leq 1$) na eliminatie van x_4 is dan

$$4x_1 + 4x_2 \leq 13$$

- 2b** Beschrijf de essentie van Beam Search en de voor- en nadelen van deze methode in vergelijken met Branch & Bound.

Antwoord

Beam search is een heuristiek gebaseerd op het Branch-en-Bound algoritme. De Beam Search methode is op twee manieren een afzwakking van de Branch-en Bound methode.

1. In de Beam Search methode wordt niet voor iedere knoop i een Upper Bound bepaald welke gegarandeerd een bovengrens is voor de doelstellingswaarde van alle daaronder liggende toegelaten geheeltallige oplossingen. In plaats daarvan wordt een Expected Bound bepaald zijnde de bovengrens waarvan wordt *verwacht* dat deze groter is dan de doelstellingswaarde van alle onder knoop i liggende toegelaten geheeltallige oplossingen. De Expected Bound wordt in de regel op heuristische wijze verkregen.
2. Zelfs knopen welke niet zijn geëlimineerd op grond van de vergelijking tussen Expected Bound en Lower Bound worden niet alle verder onderzocht. Op ieder niveau (horizontale laag) in de Branch-en-Bound boom wordt de methode vervolgd met maximaal b – de zogenaamde beam width – knopen. Dit zijn de knopen welke de beste (is hoogste) expected bound hebben.

Door de aanpassingen is het niet zeker dat met de Beam Search methode de optimale oplossing wordt gevonden. Daar staat echter tegenover dat afhankelijk van de kwaliteit van de bepaling van de expected bound wel een goede oplossing van Beam Search mag worden verwacht in aanzienlijk minder rekentijd. Bij Branch-en-Bound neemt de rekentijd exponentieel toe als functie van het aantal geheeltallige variabelen n . Bij Beam Search neemt de rekentijd slechts kwadratisch toe in n en lineair in b .

Opgave 3

Een fabriek heeft 2 machines waarop 4 producten kunnen worden gemaakt. Als een product wordt gemaakt, vereist dit bewerkingen op beide machines. In tabel 1 staat per product, hoeveel uur de bewerking van één eenheid product op ieder van beide machines vergt (product 2 vereist dus 3 uur op machine 1 en 7 uur op machine 2). Beide machines zijn gedurende 200 uur beschikbaar.

Per eenheid is van ieder van de vier producten bekend welke verkoopprijs mogelijk is. Ook deze gegevens staan in tabel 1 (product 2 levert dus 7 op per stuk). Voor product 1 geldt echter dat slechts verkopen mogelijk zijn (tegen de gegeven verkoopprijs) als eerst enige reclame wordt gemaakt. Deze campagne kost eenmalig 20.

Product 2 en 3 bevatten stoffen die niet gelijktijdig in de fabriekshal mogen zijn. Het is dus niet toegestaan om zowel product 2 als product 3 te produceren.

Verdere kosten kunnen buiten beschouwing worden gelaten. Zo zijn er nog wel productiekosten verbonden aan de machines, maar deze kosten zijn onafhankelijk van het productieschema.

Tabel 1

Product	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
Machine 1	10	3	5	7
Machine 2	5	7	5	8
Verkoopprijs	12	7	6	10

De eigenaar van de fabriek wil bepalen hoeveel hij van ieder van de vier producten moet produceren zodanig dat hij de hoogste winst behaalt.

Formuleer bovenstaand probleem als een lineair (geheeltallig) programmeringsprobleem.

Antwoord

Te bepalen zijn de waarden van de variabelen x_i , waarbij x_i staat voor het aantal eenheden dat gemaakt wordt van product i (i is 1 t/m 4).

De waarden voor de variabelen x_i volgen uit onderstaand model. Hierbij worden hulpvariabelen δ_1 en δ_2 gebruikt.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 12x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 20\delta_1 \\ \text{Onder} & 10x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 200 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 \leq 200 \\ & x_1 \leq 1000 \delta_1 \\ & x_2 \leq 1000 \delta_2 \\ & x_3 \leq 1000 (1 - \delta_2) \\ & x_i \geq 0 \text{ en geheel voor alle } i = 1, 2, 3, 4 \\ & \delta_1 \text{ en } \delta_2 \text{ gelijk aan 0 of 1}\end{array}$$

Opgave 4

- 4a** Beschrijf de essentie van drie methoden (zo verschillend mogelijk) om zogenaamde vrachtwagen routeringsproblemen op te lossen.
(Onder een vrachtwagen routeringsprobleem wordt verstaan het vinden van een verzameling routes voor wagens, zodanig dat deze wagens orders van gegeven omvang op de meest efficiënte wijze op gegeven afleveradressen kunnen bezorgen; al dan niet rekening houdend met randvoorwaarden met betrekking tot capaciteit, tijd, etc.)

Antwoord

Hier zijn vele goede antwoorden mogelijk. Er kan gekozen worden uit een grote variëteit aan methoden. Zoals Savings (Clark&Wright), Sweep (Gilllett&Miller), concurrent scheduler, twee fase methode van Fisher&Jaikumar, Set Partitioning, etc. Zie de literatuur voor een beschrijving van deze methode. Voor een goed antwoord volstaat het niet om slechts de naam van de methode te noemen. Om de essentie te beschrijven is al gauw een stukje van een regel of 5 nodig.

Als bijv. de Savings methode wordt beschreven, moet duidelijk worden gemaakt wat de savingsformule is, dat herhaald steeds de twee deelroutes worden samengevoegd die tot de hoogste besparing leiden, dat dit alleen gebeurt als aan alle randvoorwaarden kan worden voldaan in de samengevoegde deelroutes. Etc.

- 4b** Indien bij het bezoeken van afleveradressen gebruik kan worden gemaakt van vrachtwagens die op verschillende depots zijn gestationeerd, is sprake van een multi depot routerings probleem.
Beschrijf een methode voor de oplossing van een dergelijk multi depot probleem.

Antwoord

Ook hier zijn verschillende antwoorden mogelijk. Zo kan bijvoorbeeld de methode van Gillett en Johnson worden besproken (van iedere klant wordt de afstand tot het dichtstbijzijnde en op een na dichtstbijzijnde depot bepaald. De klanten waarvoor de ratio tussen deze twee grootheden klein is worden aan het dichtstbijzijnde depot toegewezen. Als voor klant x de ratio groter is dan een bepaalde grenswaarde gaat het anders. Dan wordt gekeken wat de dichtstbijzijnde andere klant y is die al aan een depot is toegewezen. Klant x wordt dan aan hetzelfde depot toegewezen als waar klant y aan was toegewezen.

Nadat alle klanten aan een depot zijn toegewezen, wordt voor ieder depot een 1-depot probleem opgelost. Dat kan bijv. met de sweep methode van Gillett&Miller.)

Opgave 5

- 5a Voor het vinden van een (lokaal) minimum van een (tweemaal continu differentieerbare) functie kunnen zoekmethoden worden gebruikt die zijn gebaseerd op het herhaald uitvoeren van de stap:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

Hierin is het punt $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ de k -de poging (schatting of benadering van het minimum), $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$ de zoekrichting naar het volgende punt en $\alpha_k \in \mathbb{R}$ een scalair die zorgt voor de stapgrootte tot het volgende punt.

Beschrijf de essentie van een methode waarmee de scalair α_k kan worden bepaald.

Antwoord

Omdat de richting $\mathbf{p}_k$ vast ligt, is er sprake van een optimaliseringsprobleem in 1 dimensie (langs een lijn). Het is dus mogelijk een methode te gebruiken zoals beschreven in de uitgereikte collegeaantekeningen in sectie NLP 1.2. over 1-dimensionale functies. De essentie van de daar beschreven methode moet kort wordt beschreven. (Dus duidelijk maken dat eerst drie punten moeten worden gevonden waarvan de middelste een kleinere functiewaarde heeft dan de twee omliggende en dat daarna steeds één van de drie punten wordt vervangen door een ander, zodanig dat de drie punten altijd het minimum blijven omklemmen, maar de afstand tussen de punten kleiner wordt. Dit nieuwe punt kan bijv. worden gevonden door kwadratisch te interpoleren.)

- 5b Noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een punt $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ om een lokaal minimum te zijn van een continu differentieerbare functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, is dat de gradiënt in $\mathbf{x}^*$ gelijk is aan nul en dat de hessiaan in dit punt positief definitief is.

Bestaan er ook noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een punt $\mathbf{x}^*$ om een globaal minimum te zijn voor een continu differentieerbare functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$? Zo ja, hoe zien deze voorwaarden er uit?

Zo nee, kunnen dergelijke voorwaarden bestaan, en zo niet, waarom niet?

Antwoord

Er kunnen geen noodzakelijke en voldoende voorwaarden bestaan voor een punt $\mathbf{x}^*$ om een globaal minimum te zijn voor een continu differentieerbare functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

De eigenschappen van de functie f in het punt $\mathbf{x}^*$ zijn ontoereikend om vast te stellen dat dit punt het globale minimum is. Veronderstel dat het punt $\mathbf{x}^*$ wel het globale minimum is van de functie f . Dan is er ook een functie f' die in de buurt van $\mathbf{x}^*$ identiek is aan f maar waarvan het globale minimum niet in $\mathbf{x}^*$ is. In het punt $\mathbf{x}^*$ is aan de hand van de eigenschappen van de functie niet te vast te stellen of men met f of met f' te doen heeft. De noodzakelijke en voldoende voorwaarden kunnen dus niet bestaan.

NB

Bij opgave 6 wordt gevraagd aan te geven hoe een probleem kan worden opgelost. Hierbij kunt u kiezen uit twee mogelijkheden :

- U geeft een modelformulering en u geeft aan hoe dit model kan worden opgelost. Als het een in de literatuur bekend model betreft waar goede oplossingsmethoden voor bekend zijn, kunt u volstaan met het noemen van deze methode.
- U beschrijft rechtstreeks een (eigen) methode voor het probleem.

Opgave 6

Een transportbedrijf moet dagelijks (tussen 8.30 en 17.30 uur) op een 200-tal adressen containers ophalen en naar haar centrale depot vervoeren. Bij iedere klant wordt slechts één container opgehaald. De containers kunnen in de wagens opgestapeld (tot en met 10 op elkaar) vervoerd worden. Het is echter niet toegestaan om zwaardere op lichtere containers te stapelen. Tevens is het onmogelijk om containers op de wagen te herladen. Als eenmaal een lichte container is geladen, kan dus pas een zwaardere worden geladen nadat de lichtere bij het depot van het transportbedrijf is afgeleverd.

Met de klanten waar de containers moeten worden opgehaald, bestaan afspraken over het tijdsinterval waar binnen de container moet worden opgehaald. In de regel beslaat dit tijdsinterval tussen de 1 en 3 uur.

Het transport bedrijf maakt gebruik van huurwagens, waarmee de volgende kosten zijn gemoeid.

- Vaste kosten per dag van f 600,- (inclusief chauffeur)
- Variabele kosten per uur van f 15,- (inclusief benzine)

Op de avond voor iedere dag is alle informatie aanwezig en moet een planning voor de volgende dag worden opgesteld. Dat wil zeggen dat moet worden bepaald hoeveel wagens moeten worden gehuurd en welk ritten iedere wagen moet rijden, zodanig dat tegen de laagste kosten alle containers worden opgehaald.

6a Beschrijf hoe bovenstaand kosten minimaliseringsprobleem kan worden opgelost.

Antwoord

Ook hier zijn weer vele goede antwoorden mogelijk. Er zal een heuristiek moeten worden verzonnen.

Omdat de momenten waarop de leveringen plaats moeten vinden niet vast liggen (er is slechts een tijdsvenster, maar het precieze moment ligt nog niet vast) is een aanpak gebaseerd op VSP niet mogelijk. Omdat er wel 10 adressen in een rit kunnen worden gecombineerd, wordt het aantal combinatiemogelijkheden te groot voor Set Partitioning. Vandaar dat een heuristische benadering aangewezen is. Je kan bijv. kiezen voor een variant van Concurrent scheduler. Je moet concurrent scheduler dan netjes beschrijven en proberen een dusdanige invulling te geven dat je goed om kunt gaan met de eis dat een zwaardere container niet op een lichtere mag worden gestapeld. Je kunt de klanten zo sorteren dat je ze in een volgorde behandelt dat deze eis waarschijnlijk niet al te hinderlijk is.

- 6b** Gesteld dat het laden van de wagen bij de klant zeer tijdrovend is. Het laden van iedere container vergt drie uur. Beschrijf nogmaals hoe het kosten minimaliseringsprobleem dan kan worden opgelost.

Antwoord

Het probleem is nu opeens veel makkelijker geworden. Omdat het laden van een container drie uur vergt en een werkdag maar 9 uur beslaat, kunnen er maar twee of hooguit drie klanten in een rit worden gecombineerd. Het aantal mogelijke combinaties is nu dus beperkt en met Set Partitioning moet het optimum te vinden zijn. Je genereert dus alle mogelijke ritten (combinaties van klanten die achtereenvolgens door dezelfde vrachtwagen zijn te behandelen) x_j . Ieder van deze ritten moet toegelaten zijn in de zin dat aan de tijdsvensters van de klanten kan worden voldaan en er rekening is gehouden met de laadtijd, rijtijd en stapelrestricties. Van iedere rit x_j zijn de bijhorende kosten c_j eenvoudig vast te stellen. Vervolgens wordt onderstaand Set Partitioning model opgelost.

$$\text{Minimaliseer } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Onder } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \text{voor } i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \text{voor } j = 1, \dots, n,$$

De parameters a_{ij} zijn 1 als klant i in rit j zit (anders 0). De restrictie zorgt er voor dat iedere klant i in één van de gekozen ritten zit. Het model is van beperkte omvang (omdat er niet al te veel mogelijke ritten zijn) zodat het met een standaard in de literatuur bekende methode voor Set Partitioning kan worden opgelost.