

Tentamen Deterministische Optimalisering

Blok 1+2, vraag 1 t/m 6: 20 december 2004, 08.45-11.30

Blok 2, vraag 4 t/m 6: 20 december 2004, 08.45-10.15

Blok 1, vraag 1 t/m 3.

Opgave 1

Gegeven is het Lineaire Programmeringsprobleem

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + 3x_2 \\ \text{Onder} & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

1a Hoe luidt de duale formulering van bovenstaande primale formulering.

1b Gegeven is dat de optimale basis bestaat uit x_1 en x_2 . Bepaal de optimale duale variabelen (hiervoor is het niet nodig simplex stappen uit te voeren).

1c Het eindtableau van de (primale) simplex methode horend bij bovenstaand primale LP probleem is (x_3 en x_4 zijn de slack variabelen van resp. de eerste en tweede restrictie):

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	0	4/3	1/3	14/3
x_2	0	1	1/3	1/3	2/3
x_1	1	0	1/3	-2/3	8/3

Gesteld dat de rechterkant van de eerste restrictie van het gegeven LP probleem van 4 veranderd in $4+\Delta$. Voor welke waarden van Δ geldt dat dezelfde basis x_1 en x_2 optimaal blijft voor het aangepaste probleem?

Opgave 2

Bereken met het Branch-en-Bound algoritme een optimale oplossing voor het volgende geheeltallige probleem.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 9x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 1\frac{1}{2}x_5 \\ \text{Onder} & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}\end{array}$$

Opgave 3

Een firma produceert tassen. Voor de komende drie perioden zijn de volgende gegevens bekend:

Tabel 1

Periode	Vraag	Productiekosten	Voorraadkosten
1	50	24	1
2	50	26	2
3	60	21	

In iedere periode kan de firma tassen produceren (de daarbij horende productiekosten staan in tabel 1. Zo is af te lezen dat in periode 2 de kosten 26 per tas bedragen).

Levering aan de klanten geschiedt aan het einde van de periode. Ook de vraag per periode staat in tabel 1. Aan het einde van iedere periode moet aan de totale vraag van die periode worden voldaan (naleveren of nee-verkopen is niet toegestaan).

In periode 1 en 2 mag meer worden geproduceerd dan nodig voor de betreffende periode. Er kan dus een voorraad bestaan aan het einde van een periode, die dan in volgende perioden kan worden verkocht. De in de tabel genoemde voorraadkosten zijn de kosten per tas die aan het einde van de betreffende periode in voorraad is.

In totaal moeten in de 3 perioden precies 160 tassen worden geproduceerd, zodanig dat de voorraad aan het einde van periode 3 gelijk is aan nul (de voorraadkosten aan het einde van periode 3 zijn daarom niet meer relevant en niet in de tabel opgenomen).

Bovenstaand probleem kan worden geformuleerd als een minimum-kosten stroom probleem op een netwerk $G = (V, A)$ dat kan worden geformuleerd als:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c'x} \\ \text{Onder} & \mathbf{Ax = b} \\ & \mathbf{x \geq 0}\end{array}$$

dat met de netwerk simplex methode kan worden opgelost.

3a Teken het netwerk G en verwerk daarin de gegevens van Tabel 1.

3b Specificeer de matrix A en de vectoren b en c .

3c Construeer de opspannende boom bij het productieschema waarbij in periode 1 de vraag voor alle drie de perioden wordt geproduceerd en bepaal de bijbehorende opspannende boom oplossing.

3d Voer uitgaande van de opspannende boom oplossing van 3c) één volgende iteratie uit van de netwerk simplex methode resulterend in een verbeterde oplossing.

Blok 2 , vraag 4 t/m 6.

Opgave 4

4a

Beschrijf de essentie van twee van de volgende drie methoden - Nearest insertion, Farthest insertion en Convex hull insertion - voor het Handelsreizigersprobleem (TSP).

Geef tevens redenen, waarom de ene door u beschreven methode betere resultaten kan geven dan de andere.

4b

Beschrijf de 'savings aanpak' (Clark & Wright) en de 'sweep aanpak' (Gillett & Miller) voor het vrachtwagenrouteringsprobleem.

Noem enkele voor- en nadelen van beide methoden.

(Onder een vrachtwagenrouteringsprobleem wordt verstaan het vinden van een verzameling routes voor wagens, zodanig dat deze wagens orders van gegeven omvang op de meest efficiënte wijze op gegeven afleveradressen kunnen bezorgen; al dan niet rekening houdend met randvoorwaarden met betrekking tot capaciteit, tijd, etc.)

4c

Vergelijk een vrachtwagenrouteringsprobleem met en zonder tijdrestricties (b.v. periodes waarin de klanten bezocht moeten worden). Wordt een routeringsprobleem door het toevoegen van tijdrestricties altijd moeilijker? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef aan waarvan het afhangt of het probleem moeilijker wordt.

Opgave 5

5a

Voor het vinden van een (lokaal) minimum van een (tweemaal continu differentieerbare) functie kunnen zoekmethoden worden gebruikt die zijn gebaseerd op het herhaald uitvoeren van de stap:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

Hierin is het punt $x_k \in \mathbb{R}^n$ de k-de poging (schatting of benadering van het minimum), $p_k \in \mathbb{R}^n$ de zoekrichting naar het volgende punt en $\alpha_k \in \mathbb{R}$ een scalair die zorgt voor de stapgrootte tot het volgende punt.

Voor het bepalen van de zoekrichting p_k bestaan verschillende methoden, waaronder de steepest descent (gradiënt methode), de methode van Newton en de quasi-Newton methoden. Wat zijn voor- en nadelen van deze verschillende manieren om de zoekrichting te bepalen?

5b

Noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een punt $x^* \in \mathbb{R}^n$ om een lokaal minimum te zijn van een continu differentieerbare functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, is dat de gradiënt in x^* gelijk is aan nul en dat de hessiaan in dit punt positief definitief is.

Bestaan er ook noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een punt x^* om een globaal minimum te zijn voor een continu differentieerbare functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$? Zo ja, hoe zien deze voorwaarden er uit?

Zo nee, kunnen dergelijke voorwaarden bestaan, en zo niet, waarom niet?

NB

Bij opgave 6 wordt gevraagd aan te geven hoe een probleem kan worden opgelost. Hierbij kunt u kiezen uit twee mogelijkheden :

- U geeft een modelformulering en u geeft aan hoe dit model kan worden opgelost. Als het een in de literatuur bekend model betreft waar goede oplossingsmethoden voor bekend zijn, kunt u volstaan met het noemen van deze methode.
- U beschrijft rechtstreeks een (eigen) methode voor het probleem.

Opgave 6

"De Thuisknip" is een bedrijf dat zich toelegt op het leveren van de service dat U thuis kunt worden geknipt.

Klanten kunnen tot 36 uur van te voren doorgeven op welke locatie en welk tijdstip zij welke behandeling willen ondergaan. Van iedere behandeling is bekend hoe lang de behandeling vergt, zodat zowel het begin- als eindtijdstip van ieder bezoek vaststaat. Helaas gaat de service nog niet zover dat ook 's avonds wordt geknipt, de normale werktijden van 9.00 tot 17.00 uur worden gehanteerd.

"De Thuisknip" maakt gebruik van vele free-lance krachten, die als kapper werkzaam zijn. De free-lancers zijn de hele dag beschikbaar. Sommige free-lancers kunnen alle behandelingen uitvoeren. De meeste free-lancers kunnen echter slechts op een beperkt aantal type behandelingen worden ingezet.

Indien een free-lancer wordt opgeroepen, wordt hem verteld welke klanten hij achtereenvolgens moet bezoeken. Bij de aanvang van zijn taak gaat de free-lancer altijd eerst naar het kantoor van "De Thuisknip" om formulieren en andere benodigdheden op te halen. Aan het einde van de dienst moeten deze weer op kantoor worden ingeleverd.

De vergoeding aan de free-lancer bestaat uit drie componenten. Een vaste vergoeding voor de oproep, een autokosten vergoeding per km, en een bedrag per uur dat de free-lancer in touw is. De werktijd gaat in bij vertrek vanaf het kantoor naar de eerste klant en loopt tot en met de terugkomst op het kantoor na de laatste klant. De km. vergoeding wordt slechts gegeven over de km. die gedurende werktijd zijn afgelegd.

Iedere avond maakt de eigenaar een planning (lijst met uit te voeren taken per free-lancer) voor de volgende dag. Hij tracht hierbij zijn kosten te minimaliseren.

6a

Beschrijf hoe het bovenstaande planningsprobleem kan worden opgelost.

6b

Het bedrijf verloopt succesvol en kan hogere eisen stellen aan de free-lancers. De kwaliteitseisen die het bedrijf nu aan de free-lancers stelt, maken dat iedere free-lancer ieder type behandeling kan uitvoeren.

Beschrijf hoe "De Thuisknip" zijn planningsprobleem nu het beste op kan lossen.