

Tentamen Deterministische Optimalisering – Blok 1

28 oktober 2004, 15.15-17.15

Opgave 1

Gegeven is het Lineair Programmeringsprobleem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Onder} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1a Leid af wat de basisoplossing is horend bij de basis x_1 en x_2 .

Antwoord

Voor iedere basis $\mathbf{B}$ is de bijbehorende basisoplossing gelijk aan $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
 Voor de basis x_1 en x_2 is

$$\mathbf{B} \text{ gelijk aan } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathbf{B}^{-1} \text{ is } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aangezien } \mathbf{b} \text{ gelijk is aan } \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ volgt } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ is } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1 is dus 2 en x_2 is 1.

1b Het eindtableau van de simplex methode horend bij bovenstaand LP probleem is:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	1	3	0	9
x_1	1	1	1	0	3
x_4	0	1	-1	1	1

Gesteld dat de rechterkant van de eerste restrictie van het gegeven LP probleem van 3 veranderd in $3+\Delta$. Voor welke waarden van Δ geldt dat dezelfde basis x_1 en x_4 optimaal blijft voor het aangepaste probleem?

Antwoord

De variabele x_3 is de slack variabele van de eerste restrictie (ofwel de tweede rij uit het eindtableau). In het begin tableau bestond de kolom onder x_3 uit een 1 in de tweede rij en verder nullen. Per saldo is gedurende de simplex stappen de tweede rij driemaal bij de eerste rij opgeteld (want daar staat nu een drie) en eenmaal van de derde rij afgetrokken. Als de rechterkant van de eerste restrictie verandert van 3 in $3+\Delta$, dan worden in het eindtableau de RHS van de tweede en derde rij resp. $3+\Delta$ en $1-\Delta$. Voor een toegelaten optimale oplossing moet de RHS groter of gelijk nul zijn. Dus moet gelden dat $3+\Delta \geq 0$ en $1-\Delta \geq 0$. Ofwel $-3 \leq \Delta \leq 1$.

Opgave 2

Beschouw voor gegeven vectoren $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en $\mathbf{e}$ en matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{D}$ het geheeltallig Programmeringsprobleem (IP):

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{Onder} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{Dx} \leq \mathbf{e} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ geheel}\end{array}$$

De LP relaxatie van bovenstaand IP probleem is gelijk aan het IP probleem met weglating van de eis dat $\mathbf{x}$ geheel moet zijn. Zij Z_{LP} de (optimale) doelstellingswaarde van de LP relaxatie.

Zij de Lagrange Relaxatie LR voor gegeven vector $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ gelijk aan:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{b}-\mathbf{Ax}) \\ \text{Onder} & \mathbf{Dx} \leq \mathbf{e} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ geheel}\end{array}$$

Zij $Z_{LR}(\mathbf{u})$ de (optimale) doelstellingswaarde van de Lagrange relaxatie LR en zij $Z_{LD} = \min_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} Z_{LR}(\mathbf{u})$

2a In welke gevallen geldt:

$$\begin{array}{l}Z_{LP} > Z_{LD} \\ Z_{LP} = Z_{LD} \\ Z_{LP} < Z_{LD}\end{array}$$

Antwoord

Z_{LP} is nooit kleiner dan Z_{LD} .

Z_{LP} is gelijk aan Z_{LD} als de geheeltalligheidseis in de Lagrange Relaxatie overbodig is.

Als de geheeltalligheids in de Lagrange relaxatie niet overbodig is (dus als de oplossing van de Lagrange Relaxatie zonder de geheeltalligheidsseis fractioneel is) dan is Z_{LP} groter dan Z_{LD} .

2b Gegeven is het geheeltallig progammeringsprobleem:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Onder} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 7x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ en geheel}\end{array}$$

Vind een snede (valid inequality) met de methode van Gomory.

Antwoord

Los eerst de LP relaxatie op van bovenstaand probleem.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	-2	-3	0	0	0
x_3	1	1	1	0	3
x_4	4	7	0	1	16

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	-2/7	0	0	3/7	48/7
x_3	3/7	0	1	-1/7	5/7
x_2	4/7	1	0	1/7	16/7

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	0	0	2/3	1/3	7 1/3
x_1	1	0	7/3	-1/3	5/3
x_2	0	1	-4/3	1/3	4/3

De optimale oplossing van de LP relaxatie is dus niet geheeltallig. We kunnen nu een snede maken op basis van de tweede vergelijking uit het eindtableau

$$x_1 + 7/3 x_3 - 1/3 x_4 = 5/3$$

Deze is te herschrijven tot

$$x_1 + (2 + 1/3) x_3 + (-1 + 2/3) x_4 = 1 + 2/3$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 - 1 = 2/3 - 1/3 x_3 - 2/3 x_4$$

Aangezien het rechterlid nooit 1 of groter kan worden, volgt dan

$$x_1 + 2x_3 - x_4 - 1 \leq 0 \text{ of } x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 1$$

Hieruit kun je x_3 en x_4 elimineren. Uit het oorspronkelijke probleem weten we dat $x_3 = 3 - x_1 - x_2$ en $x_4 = 16 - 4x_1 - 7x_2$

De toe te voegen restrictie ($x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 1$) na eliminatie van x_3 en x_4 is dan

$$3x_1 + 5x_2 \leq 11$$

Opgave 3

Bereken met het Branch-en-Bound algoritme een optimale oplossing voor het volgende geheeltallige probleem.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2,75x_5 \\ \text{Onder} & 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq 28 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ en geheel}\end{array}$$

Antwoord

De variabelen staan al zo gesorteerd dat als de geheeltalligheid geen roet in het eten zou gooien het aantrekkelijkst is om x_i te gebruiken voor x_{i+1} .

LP0: $x_1 = 2,8$ UB=22,4 en LB=0

Toevoeging van de restrictie $x_1 \geq 3$ geeft een onoplosbaar probleem

Toevoeging van de restrictie $x_1 \leq 2$ geeft

LP1: $x_1 = 2$, $x_2 = 4/7$, UB=22,28 en LB=0

Voortgaande met LP1 kunnen we de restrictie $x_2 \leq 0$ toevoegen om LP2 te krijgen en de restrictie $x_2 \geq 1$ om LP3 te krijgen.

LP2: $x_1 = 2$, $x_3 = 1$, UB=22 en LB=22

Dit is een toegelaten oplossing

LP3: $x_1 = 1,4$, $x_2 = 1$, UB=22,2 en LB=22

Voortgaande met LP3 kunnen we de restrictie $x_1 \leq 1$ toevoegen om LP4 te krijgen.

Toevoeging van de restrictie $x_1 \geq 2$ geeft $x_1 = 2$ en $x_2 \geq 1$ hetgeen onoplosbaar is.

LP4: $x_1 = 1$, $x_2 = 9/7$, UB=22,14 en LB=22

Voortgaande met LP4 kunnen we de restrictie $x_2 \leq 1$ toevoegen om LP5 te krijgen en de restrictie $x_2 \geq 2$ om LP6 te krijgen.

LP5: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0,5$, UB=22 en LB=22

LP6: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, UB=22 en LB=22

We kunnen nu stoppen. De oplossing horend bij LP6 is optimaal (net als LP2).

Een betere oplossing is niet mogelijk. Want alle eindknoten zijn toegelaten, onoplosbaar of hebben een UB die niet groter is dan de best bekende oplossing van 22.

Opgave 4

Er komt een groot sportevenement waar (onafhankelijk van elkaar) competities plaats vinden in vijf sporten. Te weten basketbal, volleybal, voetbal, handbal en korfbal.

Voor iedere sport zijn er een groot aantal wedstrijden. De RaRa bank kan reclameborden plaatsen bij één of meerdere wedstrijden van iedere sport. Per sport mag de bank maximaal 5 wedstrijden van reclameborden voorzien.

Aan de bank de keuze bij hoeveel wedstrijden van iedere sport ze reclameborden wil plaatsen. Ze wil hierbij de uitstraling van de bank zo groot mogelijk laten zijn. Onderstaande tabel laat zien hoe groot de uitstraling per wedstrijd van een sport is (een volleybalwedstrijd geeft dus 3 uitstraling). Ook de kosten voor het hebben van reclameborden per wedstrijd zijn in onderstaande tabel vermeld (een voetbalwedstrijd sponsoren kost 10). Het voor het plaatsen van reclameborden beschikbare budget bedraagt 50. Het plaatsen van de borden kost per wedstrijd een aantal uur werk (voor volleybal 1 uur per wedstrijd). Er is slechts 1 persoon die dit mag doen en deze is maar 25 uur beschikbaar.

Ter promotie van de kleinere sporten eist de organisatie dat als de bank reclameborden bij meer dan 1 voetbalwedstrijd wil, ze ook minstens bij 1 korfbalwedstrijd reclameborden moet plaatsen.

Kentallen per wedstrijd

	Basketbal	Volleybal	Voetbal	Handbal	Korfbal
Uitstraling	4	3	9	2	1
Kosten	5	4	10	3	2
Manuren	2	1	6	1	1

Formuleer bovenstaand probleem als een lineair (geheeltallig) programmeringsprobleem.

Antwoord

Te bepalen zijn de waarden van de variabelen x_i , waarbij x_i staat voor het aantal wedstrijden van sport i (i is 1 t/m 5 voor resp. basketbal, volleybal, voetbal, handbal en korfbal) waarbij borden worden geplaatst. De optimale waarden voor de variabelen x_i volgen uit onderstaand model. Hierbij wordt een hulpvariabele δ gebruikt. Deze variabele is gelijk aan 1 als er reclame wordt gemaakt bij meer dan 1 voetbalwedstrijd.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \text{Onder} & 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 50 \\ & 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \leq 25 \\ & x_3 \leq 1 + 4\delta \\ & x_5 \geq \delta \\ & 0 \leq x_i \leq 5 \text{ en geheel voor alle } i = 1,2,3,4,5 \\ & \delta \text{ is 0 of 1}\end{array}$$

Het kan eigenlijk nog beter. De variabele δ is niet nodig. De twee restricties waarin deze variabele voorkomt kunnen worden vervangen door:

$$4x_5 \geq x_3 - 1$$