herkansing datastructuren en algoritmen 2013-2014

woensdag 8 januari 2014 18.00-20.45

8 opgaven

Opgave 1. (*4+5 punten*)
Deze opgave gaat over lineaire datastructuren.

(a) Een standaard manier om het Abstract Data Type (ADT) voor stacks te implementeren is met een array ter lengte N. Geef in deze setting de implementaties van de operaties push en pop; gebruik een variable t voor de top van de stack.

(b) Nu bekijken we een alternatieve manier om stacks te implementeren. We hebben twee queues tot onze beschikking, met operaties als gespecificeerd in het ADT voor queues. Implementeer hiermee de operaties push en pop van het ADT voor stacks.

Geef de tijdscomplexiteit van push en pop in termen van grote-$\mathcal{O}$.

Opgave 2. (*4+5+4 punten*)
Deze opgave gaat over heaps en heap-sort. In heaps zijn de interne knopen gelabeld met een geheel getal, en de externe knopen zijn leeg.

(a) Geef drie verschillende max-heaps met de getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

(b) Pas heap-sort toe op de max-heap $[-, 4, 3, 2, 1]$.

Geef alle stappen expliciet naar keuze met plaatjes of in de array-representatie.

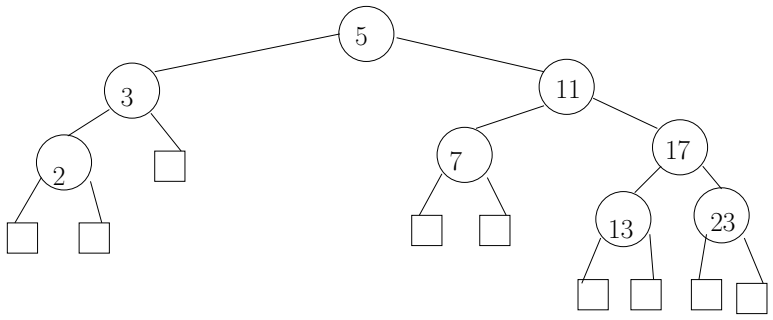
(c) Wat is de worst-case tijdscomplexiteit van heap-sort?

Licht je antwoord kort toe.

Opgave 3. *(5+4+4)*
Deze opgave gaat over binaire zoekbomen en AVL-bomen. Elke knoop heeft 0 of 2 kinderen. Interne knopen zijn gelabeld met positieve gehele getallen, en externe knopen zijn leeg.

(a) Geef pseudo-code voor een algoritme dat als input neemt een binaire zoekboom T en een knoop v in T, en dat als output geeft de knoop met de kleinste key uit de sub-boom van T die begint in v.

(b) Gegeven is de volgende AVL-boom:



Verwijder de knoop met key 2. Herbalanceer zo nodig, en geef alle stappen expliciet in plaatjes.

(c) Wat is de worst-case tijdscomplexiteit voor het verwijderen van een key aan (i) een gesorteerd array (geordend dictionary), (ii) een binaire zoekboom, (iii) een AVL-boom? (Alleen het antwoord volstaat.)

Opgave 4. *(4+4+4 punten)*
Deze opgave gaat over sorteren.

(a) Geef een concreet worst-case input-rijtje voor bubble sort ter lengte 5.

Hoe ziet een worst-case input-rijtje voor bubble sort er in het algemeen uit ?

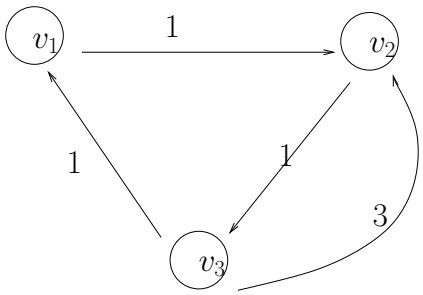
(b) Beargumenteer dat bubble sort in $\mathcal{O}(n^2)$ is.

(c) Geef de quick-sort boom voor het sorteren van de input-rij $[3, 6, 1, 7, 5, 8, 2, 4]$. Neem als pivot steeds het laatste element,

Opgave 5. (*5+4 punten*)
Deze opgave gaat over bomen en grafen. Alle knopen zijn gelabeld.

(a) Geef de pseudo-code voor inorder traversal van een binaire boom, zonder recursie, maar gebruikmakend van een stack. (Elke knoop heeft 0 of 2 kinderen.)

(b) Pas het dynamic programming algoritme voor het verkrijgen van alle kortste paden (All-Pair Shortest Paths in het boek) toe op de volgende graaf:



Opgave 6. (*4+4+5 punten*)
Gegeven is het dynamic programming algoritme van Kadane voor het berekenen van een grootste som van een sub-array:

Algorithm maxSubArray(A, n):
  new B
  $B[0] :=$ max$(A[0], 0)$
  m $:= B[0]$
  for $r = 1$ **to** $n - 1$ **do**
    $B[r] :=$ max$(0, B[r-1] + A[r])$
    $m :=$ max$(m, B[r])$
  return m

(a) Pas het algoritme toe op het array $[-1, 2, 3, -4]$. Geef je berekeningen voor het verkrijgen van de $B[i]$.

(b) Wat is de tijdscomplexiteit in termen van grote-Oh van het algoritme van Kadane? Licht je antwoord kort toe.

(c) Pas het algoritme aan zodat het niet een grootste, maar een kleinste som van een sub-array geeft.

Opgave 7. *(4+5 punten)*

(a) Is een algoritme in $\mathcal{O}(n)$ *altijd* sneller dan een algoritme in $\mathcal{O}(n^2)$? Licht je antwoord kort toe.

(b) We bekijken een stack met behalve de gebruikelijke operaties push en pop ook de operatie multipop:

```
Algorithm multipop(k):
    while not isEmpty() and k ≥ 0 do
        pop()
        k := k − 1
```

Leg uit waarom in een rijtje van n operaties de amortized complexiteit per operatie in $\mathcal{O}(1)$ is.

Opgave 8. *(4+4+4 punten)*
Deze opgave gaat over pattern matching.

(a) Gegeven is het alfabet $\{0, 1\}$ en het patroon $P = 001$. Geef een tekst T van lengte tien met de eigenschap dat het zoeken van P in de tekst T met het brute–force algoritme in het slechtste geval (grootst mogelijke aantal stappen) valt. Licht kort toe.

(b) Gegeven is het alfabet $\{0, 1\}$ en het patroon $P = 100$. Geef een tekst T van lengte tien met de eigenschap dat het zoeken van patroon P in de tekst T met het Knuth–Morris–Pratt algoritme (dat de failure functie gebruikt) evenveel stappen kost als met het brute–force algoritme. Licht kort toe.

(c) Pas het Boyer–Moore pattern-matching algoritme toe op

$$\begin{aligned} T &= bbbaaacccabc \\ P &= abc \end{aligned}$$

Geef en nummer alle stappen. Je hoeft de functie last niet expliciet te geven.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.