

Normering/instructie: alle studenten maken zo mogelijk alle opgaven, maar je hoeft niet alles af te hebben. Motiveer je antwoorden. Je kunt bij elke som beginnen. Alleen voor 2cdg heb je eerdere antwoorden nodig. Totaal 12 onderdelen. **Minstens** 1 punt per onderdeel. De volle 11 kwartier mogen worden gebruikt. Er is geen verschil tussen het hele tentamen en het tweede deeltentamen.

Eindcijfer: Een gewogen gemiddelde van beide tentamens, waarbij het eerst voor de helft meetelt indien je daar profijt van hebt, en anders niet.

1. Beschouw de familie van Möbius-transformaties, gegeven door

$$z \rightarrow \frac{z}{z + \epsilon + i} = w.$$

- a) Laat $\epsilon = 0$. Wat is het beeld van $\{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$?
 b) Ook als $\epsilon > 0$ wordt 0 op 0 afgebeeld en ∞ op 1. De imaginaire as wordt nu afgebeeld op een cirkel. Wat is het middelpunt van deze cirkel?

2. Laat $0 < a < \pi$. In deze som integreren we de functie

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^3} \frac{\cos z}{\sin z}$$

over de randen van de vierkanten

$$V_n = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| < (n + \frac{1}{2})\pi, |y| < (n + \frac{1}{2})\pi\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(maak een plaatje!) We kiezen een rectificeerbare kromme γ_n met $n(\gamma_n, 0) = 1$, waarvan het beeld $\{\gamma_n\}$ de rand van V is.

- a) Bereken de kwadratische benadering van

$$\frac{\cos z}{\sin z}$$

rond $z = a$ en bereken het residu van $f(z)$ in $z = -a$.

- b) Bepaal de residuen in de andere singulariteiten van $f(z)$.
 c) Gebruik de residustelling om de integraal

$$\oint_{\gamma_n} f(z) dz$$

als eindige som te schrijven.

- d) Verifieer in detail de voorwaarden met betrekking tot windingsgetallen van de stelling die je in het vorige onderdeel hebt gebruikt.
 e) Gebruik, voor $z = x + iy$, dat

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad \text{en} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

en laat zien dat er een $M > 0$ is zo dat

$$|f(z)| < \frac{M}{n^3}$$

voor alle z in de rand van V_n , met M onafhankelijk van a en n vanaf zekere n .

f) Laat met behulp van 2e en een afchatting zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} f(z) dz = 0.$$

g) Laat $\alpha \in (0, 1)$. Geef een formule voor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(k + \alpha)^3}.$$

3. Dit is de theorieopgave. Er geldt dat

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} = (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} kz^{n-1-k}w^{k-1} = (z - w)(z^{n-2} + \dots + (n-1)w^{n-2})$$

geldt voor $z, w \in \mathbb{C}$ met $z \neq w$.

a) Bewijs dat

$$\left| \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} |z - w|$$

voor $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ en $r > 0$ met $z \neq w$, $|z| \leq r$ en $|w| \leq r$.

b) Leg uit hoe de afchatting in 3a wordt gebruikt om te bewijzen dat machtreeksen binnen hun convergentiestraal term voor term gedifferentieerd mogen worden.

c) Bewijs de gegeven identiteit.