

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe Functietheorie (Heel/Deel2)
Afdeling Wiskunde	24-12-2010
Vrije Universiteit	12.00 - 14.45

Normering: Alle onderdelen (21 totaal) wegen even zwaar. Geen paniek: cijfer is de totaalscore, maar maximaal 10. Succes!

Instructie: alle studenten mogen alle opgaven maken; je kunt dus kiezen, bijvoorbeeld alleen som 2, of 2 juist helemaal niet. Je kunt bij elke som beginnen. Sla eventueel onderdelen over als je het resultaat daarna kunt gebruiken in de volgende onderdelen. De volle 11 kwartier mogen worden gebruikt. Er is geen verschil tussen het hele tentamen en het tweede deeltentamen. Motiveer je antwoorden.

Eindcijfer: Een gewogen gemiddelde van beide tentamens, waarbij het eerst voor de helft meetelt indien je daar profijt van hebt, en anders niet.

1. De Möbius-transformatie, gegeven door

$$z \rightarrow \frac{z}{z+1} = w,$$

beeldt 0 op 0 en ∞ op 1 af.

- Geef een parametervoorstelling $w = w(y)$ van het beeld van de imaginaire as en schrijf deze uit in reële en imaginaire delen $w = u + iv$.
- Het beeld van de imaginaire as is een cirkel. Welke cirkel?
- Wat is het beeld van $\{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$? Licht je antwoord toe.
- Ook de Möbius-transformatie gegeven door

$$z \rightarrow \frac{z}{z+1+\epsilon i} = w,$$

met $\epsilon > 0$, beeldt 0 op 0 en ∞ op 1 af. De reële as wordt nu afgebeeld op een cirkel. Gebruik het gedrag voor z klein om de raaklijn aan deze cirkel in $w = 0$ te bepalen en leid hieruit af wat het middelpunt van deze cirkel is.

2. Laat $0 < a < \pi$. In deze som integreren we de functie

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\cos z}{\sin z}$$

over de randen van de vierkanten

$$V_n = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| < (n + \frac{1}{2})\pi, |y| < (n + \frac{1}{2})\pi\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(maak een plaatje!)

- Geef een *wiskundig preciese* beschrijving in woorden of formules van een rectificeerbare kromme γ_n met $n(\gamma_n, 0) = 1$, waarvan het beeld $\{\gamma_n\}$ de rand van V is. Leg ook uit waarom $n(\gamma_n, 0) = 1$.
- Leg uit waarom dan ook $n(\gamma_n, w) = 1$ voor elke $w \in V_n$.

- c) Er geldt dat $n(\gamma_n, w) = 0$ voor elke $w \in \mathbb{C}$ buiten het gesloten vierkant

$$\overline{V}_n = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq (n + \frac{1}{2})\pi, |y| \leq (n + \frac{1}{2})\pi\}.$$

Leg dit uit voor w met $\operatorname{Re} w > (n + \frac{1}{2})\pi$.

- d) Laat zien dat met $z = x + iy$ geldt dat

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad \text{en} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

(denk aan de Cauchy-Riemann som van het eerste tentamen).

- e) Laat met het vorige onderdeel zien dat er een $M > 0$ is zo dat

$$|f(z)| < \frac{M}{n^2}$$

voor alle z in de rand van V_n , met M onafhankelijk van a en n vanaf zekere n (het enige dat je hierbij nodig hebt van $\sinh y$ is dat $|\sinh y|$ groot is als $|y|$ groot).

- f) Laat met het vorige onderdeel en een afchatting zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} f(z) dz = 0.$$

- g) Bereken de lineaire benadering van

$$\frac{\cos z}{\sin z}$$

rond $z = a$ en bereken het residu van $f(z)$ in $z = -a$.

- h) Bepaal de residuen in de andere singulariteiten van $f(z)$.

- i) Bereken met de residustelling met windingsgetallen de integraal

$$\oint_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Verifieer ook de voorwaarden van de stelling.

- j) Bereken met het vorige onderdeel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(k + \alpha)^2}$$

voor elke $\alpha \in (0, 1)$.

- k) Beschouw vervolgens α als variabele en gebruik het gedrag bij $\alpha = 0$ om

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

te berekenen.

3. Dit is een opgave om Opgave 4 voor te bereiden.

a) Laat zien dat de identiteit

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} = (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} kz^{n-1-k}w^{k-1} = (z - w)(z^{n-2} + \dots + (n-1)w^{n-2})$$

geldt voor $z, w \in \mathbb{C}$ met $z \neq w$.

b) Bewijs dat

$$\left| \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} |z - w|$$

voor $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ en $r > 0$ met $z \neq w$, $|z| \leq r$ en $|w| \leq r$.

4. Dit is een theoreesom over de complex differentieerbaarheid van

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{en} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Neem aan dat de machtreeks voor $f(z)$ convergent is in $z_0 \in \mathbb{C}$ en dat $0 < R < |z_0|$.

a) Laat zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 |a_n| R^n$$

convergent is.

b) Gebruikt mag en moet nu worden dat voor $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{is convergent} \quad \text{en} \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|.$$

Neem aan dat de machtreeks voor $g(z)$ convergent is voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \leq R$. Bewijs met behulp van 4a en de ongelijkheid in 3b dat er een $M > 0$ is zo dat

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(z) \right| \leq M |z - w|$$

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$ met $|z| \leq R$, $|w| \leq R$ en $z \neq w$.

c) Leg uit waarom aan de aanname voor $g(z)$ in 4b voldaan is.

d) Leg uit waarom f en g differentieerbaar zijn in elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < |z_0|$.