

Werk netjes, licht antwoorden duidelijk toe.

Voor elk onderdeel kun je een half punt krijgen.

1. De complexe functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wordt gegeven door $f(z) = \sin z$. We schrijven $w = f(z)$, $w = u + iv$, $z = x + iy$.

- Druk u en v uit in x en y .
- Bereken $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.
- Waarom is f complex differentieerbaar?

2. Gegeven zijn de complexe functie

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$$

en voor $R > 0$ de krommen

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq R\}.$$

- Bepaal de singulariteiten van $f(z)$.
- Bepaal het residu van $f(z)$ in de singulariteit die ligt in het eerste kwadrant.
- Kies een orientatie van γ_2 . Laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

- d) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Geef γ een orientatie en bereken

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

voor alle waarden van $R > 0$ waarvoor deze integraal bestaat.

- e) Bereken $\int_0^\infty f(x) dx$.

3. Gegeven zijn de meerwaardige complexe functie

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

en voor $R > \epsilon > 0$ de krommen

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq -\epsilon, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

- a) Kies een eenwaardige definitie van $\log z = \log |z| + i \arg z$ in het bovenhalfvlak.
 b) Kies een orientatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

- c) Kies een orientatie van γ_4 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0$$

- d) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$. Geef γ een orientatie en bereken $\oint_{\gamma} f(z) dz$ voor $R > 2$ en $0 < \epsilon < 1$.

- e) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

- f) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

4. Voor $k, n \in \mathbb{N}$ worden de complexe functies $f_k(z)$, $F_n(z)$ en $F(z)$ gegeven door

$$f_k(z) = \frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} = \frac{2z}{z^2 - k^2}; \quad F_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n f_k(z); \quad F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)$$

- a) Laat voor $z \notin \mathbb{Z}$ zien dat $F_n(z) - F_n(z+1) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.
 b) Bereken voor $k > R > 0$ het maximum $M_k(R)$ van $|f_k(z)|$ op $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.
 c) Waarom is voor $n > R > 0$ de reeks

$$\sum_{k=n}^{\infty} M_k(R)$$

convergent?

- d) Waarom is F complex differentieerbaar op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$?
 e) Laat zien dat $F(z) = F(z+1)$ voor alle $z \notin \mathbb{Z}$.
 f) Schrijf $z = x + iy$. Laat zien dat voor $y > 0$ en $|x| \leq 1$ geldt dat

$$|f_k(z)| \leq \frac{2\sqrt{1+y^2}}{(k-1)^2 + y^2}$$

- g) Voor $y > 0$ geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y}{k^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Laat zien dat $F(z)$ begrensd is op $\{z = x + iy : y \geq 1\}$.