

Duur: 2 uur voor W, $2\frac{3}{4}$ uur voor N

29-5-2006

Aantal opgaven: 6

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, en 4.

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.

$\Re z$ staat voor het reële deel van z en $\Im z$ voor het imaginaire deel.

1. a) Voor welke waarden van z is de functie $f(z) = (\bar{z})^2$ differentiëerbaar?
b) Gebruik de integraalformule van Cauchy om

$$\oint_W \frac{e^z}{z^3 - 1} dz$$

te evalueren, waarin W de eenmaal linksom doorlopen cirkel met straal 2 en middelpunt 2 is.

2. a) Van de analytische functie f is gegeven dat $\Re f(x + iy) = x^2 y$. Is dit mogelijk?
Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n functie. Zo nee, geef aan waarom niet.
b) Zij

$$f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}.$$

Bepaal en schets het beeld onder f van $S = \{z : \Re z > 0 \text{ en } \Im z > 0\}$. Gebruik de hoofdwaaarde van $\sqrt{\cdot}$.

3. (a) Bereken de lijnintegraal

$$\int_{[1+i, 2]} z^2 dz.$$

- (b) Evalueer:

$$\int_{C_1} \frac{z+1}{z^2+2} dz,$$

als C_1 de eenmaal linksom doorlopen eenheidscirkel om 0 aanduidt.

- (c) Toon aan:

$$\left| \int_{C_2} \frac{z+1}{z^2+2} dz \right| \leq 6\pi,$$

als C_2 de eenmaal linksom doorlopen cirkel om 0 met straal 2 aanduidt.

Z.O.Z.

4. Zij

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

- a) Ontwikkel f in een Taylorreeks om $z = 0$ en geef de convergentiestraal.
- b) Geef alle Laurentontwikkelingen van f rond $z = 1$ met de ringen waarop ze geldig zijn.
- c) Evalueer $\oint_W f$ waarin W de eenmaal linksom doorlopen cirkel met straal 2 om 0 aanduidt.

5. Zij

$$f(z) = \frac{\cos(\pi/z)}{z + 1}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
- b) Vind het residu in alle singulariteiten van f inclusief het residu in ∞ .

6. a) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx.$$

- b) Bereken met behulp van een kringintegraal op de eenheidscirkel

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}.$$

	1 a:	4;	2 a:	4;	3 a:	3;	4 a:	3;	5 a:	3;	6 a:	5;
Normering:	b:	4	b:	5	b:	3	b:	5	b:	6	b:	4
					c:	3	c:	2				

$$\text{W eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4} \quad \text{N eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{6}.$$