

Duur: 2 uur (deeltentamen), 3 uur (gehele tentamen)
Aantal opgaven: 4 (deeltentamen), 6 (gehele tentamen)

1-7-2005

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

Deeltentamen: opgaven 1, 2, 3, 4.

Gehele tentamen: opgaven 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\Re z$ staat voor het reële deel van z en $\Im z$ voor het imaginaire deel.

1. Zij

$$f(z) = \frac{ze^{1/z}}{z^2 + 1}.$$

- a) Vind de singulariteiten en hun aard voor f .
 - b) Bepaal de residuen (inclusief het residu op oneindig).
 - c) Bereken $\oint_{C_r} f$ als C_r de cirkel $|z| = r$ is (eenmaal linksom doorlopen) voor alle waarden van r zodat C_r geen singulariteit bevat.
2. a) Bewijs dat elke gehele functie f met de eigenschap $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ een polynoom is. (Hint: onderzoek de singulariteit van de functie $f(1/z)$.)
- b) Toon aan dat $f(z) = e^z + 5z^5 - z^3 + 1$ vijf nulpunten heeft binnen de cirkel $\{z : |z| = 1\}$. Bereken vervolgens $\oint_{\gamma} (1/z) dz$, waarin $\gamma(t) = f(e^{it})$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

- (a) Ontwikkel $f(z)$ in een Laurentreeks op een gereduceerde omgeving van $z = 1$.
- (b) Ontwikkel $f(z)$ in een Laurentreeks op een gereduceerde omgeving van $z = 0$.
- (c) Bepaal de singulariteiten en bereken de residuen van f .
- (d) Bereken de kringintegraal $\oint_{\gamma} f(z) dz$, waarin γ de eenmaal linksom doorlopen cirkel $|z| = 2$ voorstelt.

Z.O.Z.

4. Bereken met behulp van een geschikt gekozen kringintegraal:

(a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx,$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5+3\cos \theta} d\theta.$$

5. (a) Vind de analytische functie f met de eigenschappen $\Re f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$ en $f(0) = i$.

(b) Laat $g(x+iy) = u(x) + iv(y)$ een analytische functie zijn op $\mathbb{C}$. Laat zien dat g een lineaire functie moet zijn, d.w.z. $u(x) = ax + b$ en $v(y) = cy + d$ met a, b, c, d constant.

6. (a) Zij

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}; \quad S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}.$$

Bepaal en schets het beeld van S onder f .

(b) Bereken de kringintegraal $\oint_C f(z) dz$, waarin C de eenmaal linksom doorlopen cirkel $|z - 2| = 1$ voorstelt.

	1 a: 2;	2 a: 4;	3 a: 2;	4 a: 4;	5 a: 4;	6 a: 5;
Normering:	b: 4	b: 5	b: 3	b: 4	b: 5	b: 4
	c: 3		c: 3			
			d: 2			

$$\text{Deeltentamen eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}$$

$$\text{Tentamen eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{6}.$$