



Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit

(Deel)tentamen voor W
Complexe-functietheorie

voor studenten Wiskunde.

Duur: 2 uur (deeltentamen), 3 uur (gehele tentamen)

25-6-2004

Aantal opgaven: 4 (deeltentamen), 6 (gehele tentamen)

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

Deeltentamen: opgaven 1, 2, 3, 4.

Gehele tentamen: opgaven 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\Re z$ staat voor het reële deel van z en $\Im z$ voor het imaginaire deel.

1. Zij

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z+1}.$$

- a) Vind de singulariteiten en hun aard voor f .
 - b) Bepaal de residuen (inclusief het residu op oneindig).
 - c) Bereken $\oint_{C_r} f$ als C_r de cirkel $|z| = r$ is (eenmaal linksom doorlopen) voor alle waarden van r zodat C_r geen singulariteit bevat.
2. a) Zij f analytisch op $\mathbb{C}$ afgezien van een eindig aantal singulariteiten. Als gegeven is dat $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ toon dan aan dat $\text{Res}(f(z), \infty) = 0$.
- b) Bepaal alle gehele functies f die voldoen aan de voorwaarden $|f(z)| \leq |e^z|$ en $f(0) = -1/2$. [Hint: Liouville].

3. Zij

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

- a) Vind de breuksplitsing van f .
- b) Ontwikkel de functie $g(z) = 1/(z-1)^2$ in een Laurentreeks om 0 voor $|z| > 1$ [Hint: bekijk $\frac{d}{dz}(\frac{1}{z-1})$].
- c) Ontwikkel f in een Laurentreeks op de ring $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

Z.O.Z.

4. a) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

- b) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3 - 4i \sin \theta)^2}.$$

5. a) Van een gehele functie $f(z)$ is gegeven dat $\Re f(x + iy) = e^{ax} \cos(2y)$. Gegeven is dat a een positief reëel getal is en dat $f(0) = 1$. Bepaal a en f en druk $f(z)$ uit in z .

- b) Laat $\log$ de hoofdwaarde zijn van de logaritme. Bepaal en schets het beeld onder $\log$ van

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ en } 0 < \Im z < \Re z\}.$$

6. a) Wat is de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}?$$

- b) Zij f een analytische functie op $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die even is (dus $f(-z) = f(z)$). Toon aan dat f een primitieve heeft op G . [Hint: Laurent.]

	1 a: 3;	2 a: 4;	3 a: 2;	4 a: 4;	5 a: 5;	6 a: 4;
Normering:	b: 4	b: 4	b: 4	b: 4	b: 5	b: 4
	c: 3		c: 4			

$$\text{Deeltentamen eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}$$

$$\text{Tentamen eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{6}.$$