



Duur: 3 uur

25-8-2003

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, 7, en 8;

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.

$\Re z$ staat voor het reële deel van z en $\Im z$ voor het imaginaire deel.

1. a) Van de analytische functie f is gegeven dat $\Re f(x + iy) = 2x - x^3 + axy^2 - 1$ en dat $f(1) = 0$. Bepaal a en $f(z)$, uitgedrukt in z .

b) Zij

$$f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}.$$

Bepaal en schets het beeld onder f van $S = \{x + iy : x < 0, 0 < y < \pi\}$.

2. Zij

$$f(z) = \frac{z - 1}{z^2 + z}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
b) Ontwikkel f in een Taylorreeks om $z = 1$ en geef de convergentiestraal.
c) Geef alle Laurentontwikkelingen van f rond $z = 0$ met de ringen waarop ze geldig zijn.

3. Zij $a \in \mathbb{R}$ met $a > 1$. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}.$$

4. Zij

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten en hun aard.
b) Bepaal $\oint_{\Gamma_1} f(z) dz$ en $\oint_{\Gamma_4} f(z) dz$, waarin Γ_r de cirkel om 0 is met straal r , eenmaal in positieve zin doorlopen.

Z.O.Z.

5. Zij

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - 1)},$$

waarin α een getal is met $\Im \alpha > 0$.

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
- b) Bepaal het residu van f in elk van de singulariteiten.
- c) Bepaal de Cauchy Hoofdwaarde:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2(x - 1)}.$$

6. **alléén N.** Vind de singulariteiten en hun aard voor de volgende functies. Bepaal vervolgens de residuen (inclusief het residu op oneindig).

a)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}.$$

b)

$$g(z) = \frac{ze^{1/z}}{z - 1}$$

7. **alléén W.** Zij

$$f(z) = e^z + 4z^4 - z^3.$$

- a) Toon aan dat f vier nulpunten heeft binnen de cirkel $|z| = 1$.
- b) Noem $\gamma(t) = f(e^{it})$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$. Bereken $\oint_{\gamma} (1/z) dz$.

8. **alléén W.** Laat G een gebied zijn en laat f en g analytische functies zijn op G zo dat $f(z)g(z) = 0$ voor alle $z \in G$. Toon aan dat f of g de nulfunctie is.

Normering:

1 a:	4;	2 a:	3;	3 a:	6;	4 a:	3;	5 a:	3;	6a:	6;	7a:	4;	8:	5
b:	5	b:	3			b:	5	b:	3	b:	6	b:	3		
		c:	4					c:	3						

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{6}$.