

Duur: 3 uur

27-8-2002

Aantal opgaven: 6

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 7;

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.

$\Re z$ staat voor het reële deel van z .

1. a) Van de analytische functie f is gegeven dat $\Re f(x + iy) = x^2 y^2$. Is dit mogelijk?
Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n functie. Zo nee, geef aan waarom niet.
b) Zij

$$f(z) = \log \left(i \frac{1-z}{1+z} \right).$$

Bepaal en schets het beeld onder f van $S = \{z : |z| < 1\}$. Gebruik de hoofdwaarde van $\log z$.

2. Zij

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
b) Ontwikkel f in een Taylorreeks om $z = 0$ en geef de convergentiestraal.
c) Geef alle Laurentontwikkelingen van f rond $z = 1$ met de ringen waarop ze geldig zijn.

3. a) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

- b) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 + 8 \cos \theta}.$$

Z.O.Z.

4. Zij

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
 b) Zij Γ de (eenmaal linksom doorlopen) rechthoekige kromme met hoekpunten $2 - 2i, -2 - 2i, 2 + \frac{1}{4}i, -2 + \frac{1}{4}i$.
 Bereken $\oint_{\Gamma} f(z) dz$.

5. Zij

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z - 1}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
 b) Voor een functie zoals f kan het *residu in oneindig* als volgt berekend worden:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{-f(1/z)}{z^2}.$$

Vind het residu in oneindig voor f .

- c) Voor een functie met eindig veel singulariteiten is de som van alle residuen in $\mathbb{C}$ plus het residu in oneindig nul. Vind het residu in alle singulariteiten van f .

6. **alléén N.** Bereken

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^3)^{1/3}}$$

door de integraal uit te drukken in termen van de Beta functie en vervolgens de Γ functie.

7. **alléén W.** Formuleer en bewijs de Hoofdstelling van de Algebra.

	1 a:	4;	2 a:	2;	3 a:	4;	4 a:	3;	5 a:	3;	6:	5;	7:	5
Normering:	b:	4	b:	3	b:	4	b:	4	b:	3				
			c:	3					c:	3				

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{5}.$$