

Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit

Deeltentamen/tentamen
Complexe-functietheorie

voor studenten Wiskunde en Natuurkunde.

Duur: 2 uur (deeltentamen) resp. 3 uur (gehele tentamen)

04-07-2002

Aantal opgaven: 4 (deeltentamen) resp. 6 (gehele tentamen)

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

Deeltentamen: Voor wiskundestudenten: opgaven 1, 2, 3, 4. Voor natuurkundestudenten: opgaven 1, 2, 3, 5.

Gehele tentamen: Voor wiskundestudenten: opgaven 1, 2, 3, 4, 6, 7. Voor natuurkundestudenten: opgaven 1, 2, 3, 5, 6, 7.

Met $\Re z$ wordt het reële deel van z , en met $\Im z$ het imaginaire deel van z aangeduid.

1. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

- (a) Ontwikkel $f(z)$ in een Laurentreeks op een gereduceerde omgeving van $z = 1$.
- (b) Bepaal de singulariteiten en bereken de residuen van f .
- (c) Bereken de kringintegraal $\oint_{\gamma} f(z) dz$, waarin γ de eenmaal linksom doorlopen cirkel $|z| = 2$ voorstelt.

2. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

- (a) Bepaal alle singulariteiten van $f(z)$ en hun aard; als het polen betreft geef dan aan van welke orde deze zijn.
- (b) Laat $\sum a_n z^n$ de Taylor-ontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 1$ voorstellen. Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks en de coëfficiënten a_0, a_1, a_2 .
- (c) Geef voor de Laurentreeks op een gereduceerde omgeving van $z = 0$ de eerste drie coëfficiënten en het definitiegebied.

3. Bereken met behulp van een geschikt gekozen kringintegraal:

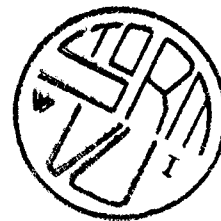
(a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx,$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5+3\cos \theta} d\theta.$$

Z.O.Z.



4. Alleen voor de wiskunde-studenten

Laat g een analytische functie zijn op een gebied G . Bewijs dat als $\Re g$ een maximum aanneemt op G dan is g een constante functie. (Hint: beschouw e^g .)

5. Alleen voor de natuurkunde-studenten

- (a) Druk de volgende integraal uit in de Beta-functie, en bereken vervolgens de waarde:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- (b) Bereken

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

6. (a) Vindt de analytische functie f met de eigenschappen $\Re f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$ en $f(0) = i$.
(b) Laat $g(x+iy) = u(x) + iv(y)$ een analytische functie zijn op $\mathbb{C}$. Laat zien dat g een lineaire functie moet zijn, d.w.z. $u(x) = ax + b$ en $v(y) = cy + d$ met a, b, c, d constant.

7. (a) Zij

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}; \quad S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}.$$

Bepaal en schets het beeld van S onder f .

- (b) Bereken de kringintegraal $\oint_C f(z) dz$, waarin C de eenmaal linksom doorlopen cirkel $|z - 2| = 1$ voorstelt.

	1 a:	3;	2 a:	3;	3 a:	5;	4:	9;	5 a:	5;	6 a:	4;	7 a:	5
Normering:	b:	3	b:	3	b:	4			b:	4	b:	5	b:	4
	c:	3	c:	3										

Eindcijfer(deeltentamen) = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$; eindcijfer(tentamen) = $1 + \frac{\text{totaal}}{6}$.