

1(a) Zij $g(x+iy) = xy + \alpha(x^2 - y^2)$ analytisch en laat $\alpha = a + bi$
 $g(z) = xy + a(x^2 - y^2) + i b(x^2 - y^2) = u + iv$.

Dus $u_x = y + 2ax = v_y = -2by$ voor alle x en y (C-R).

$\Rightarrow \alpha = 0$ en $b = -\frac{1}{2}$ dus $g(z) = xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)i$.

Verifieer andere helft v C-R: $v_x = -x$ en $u_y = x$. Dus $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(b) Laat $f(z) = (x^2 + y^2) + iv(x, y)$ analytisch zijn.

$\Rightarrow v_x = -u_y = -2y$ en $v_y = u_x = 2y$.

Dus $v_{xy} = -2$ en $v_{yx} = 2$ in tegenspraak met $v_{xy} = v_{yx}$.

Dus een analytische functie bestaat niet.

2(a) $e^z = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. Laat $z = x+iy$

$|e^z| = e^x = \sqrt{2}$ dus $x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.

$e^{x+iy} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \Rightarrow e^{iy} = e^{i\pi/4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ voor $k \in \mathbb{Z}$.

$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i\pi(\frac{1}{4} + 2k)$ voor $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Stel dat f analytisch is op gebied G en $f(z) = u + iv$ met u constant. Dan $f'(z) = u_x + i v_x = u_x - i u_y = 0$.

Omdat G samenhangend is geldt nu dat f constant is op G . (Stelling 5.6)

(c) Niet waar, tegenvoorbeeld: $G = \{x+iy : x \neq 0\}$

$f(x+iy) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ i & \text{als } x > 0 \end{cases}$ analytisch $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$
 $u = 0$ constant

3(a) Parametriseer C_1 : $z = 2e^{i\theta} + 2$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

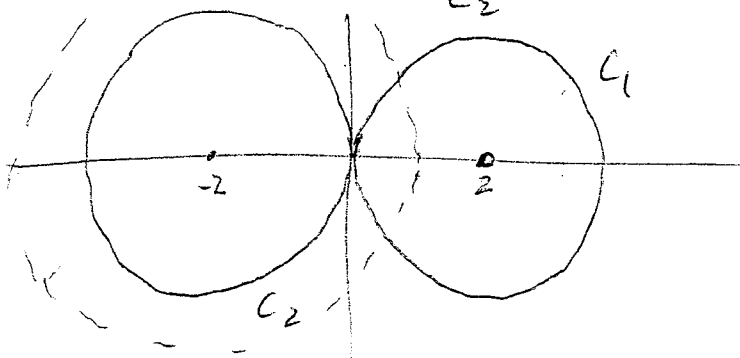
$$\oint_{C_1} \frac{z^2}{z-2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{4(e^{i\theta} + 1)^2}{2e^{i\theta}} 2ie^{i\theta} d\theta = 4i \int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} + 1) d\theta$$

$$= 4i \left[\frac{e^{2i\theta}}{2i} + \frac{2e^{i\theta}}{i} + \theta \right]_0^{2\pi} = 8\pi i.$$

(b) $\frac{z^2}{z-2}$ is overal analytisch behalve in $z=2$

Dus $\frac{z^2}{z-2}$ is analytisch op de cirkelschijf $\{z : |z+2| < 3\}$ die C_2 bevat.

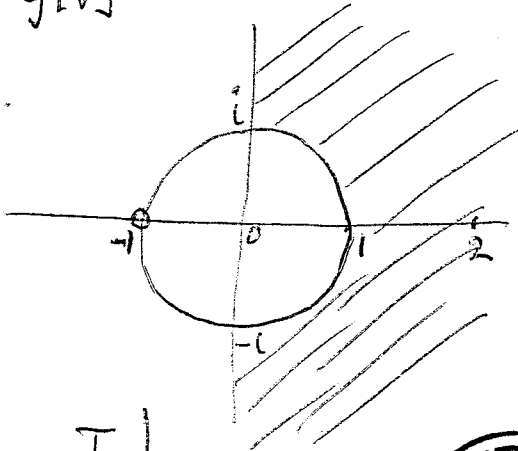
Stelling van Cauchy: $\oint_{C_2} \frac{z^2}{z-2} dz = 0$.



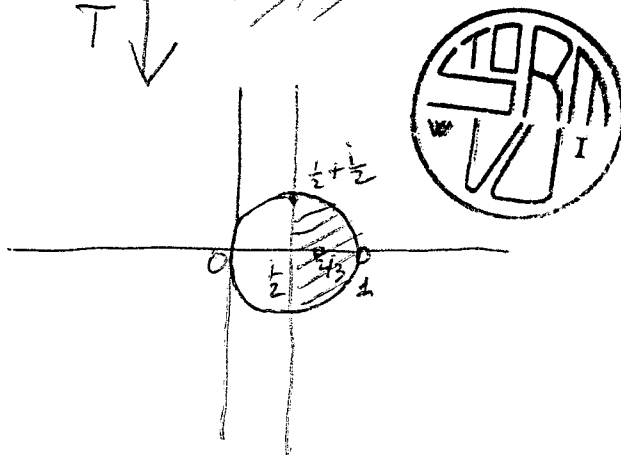
4(a) $g(z) = e^z$, $T(z) = \frac{z}{1+z}$, $f(z) = T(g(z))$

$$z \in g[V] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = e^x \text{ met } x > 0 \\ \arg z = y \text{ met } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| > 1 \\ \operatorname{Re}(z) > 0 \end{array} \right\}$$

$g[V]$



$T \downarrow$



T is een Möbius trans.

$$T(-1) = \infty \quad T(\infty) = 1$$

$$T(0) = 0 \quad T(i) = \frac{1}{2}$$

$$T(i) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \quad T(2) = \frac{2}{3}$$

T beeldt de eenheids cirkel af op de lijn $x = \frac{1}{2}$ en T beeldt de imaginaire as af op de cirkel $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

Door $T(z) = \frac{z}{3}$ als test punt gebruiken zien we dat $f[V] = T[g[V]] =$

$$\{z : \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}, |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$$

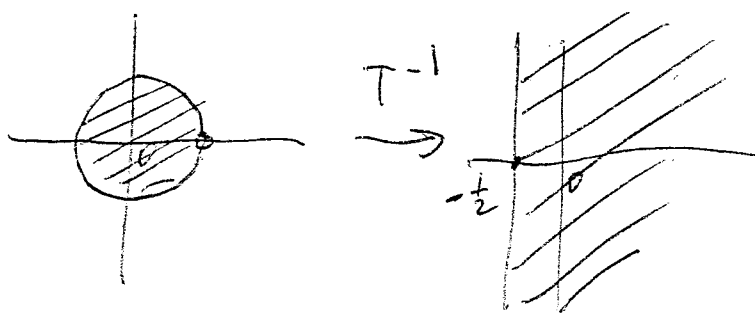
(b) Als $|w| \leq 1$ dan $\sum \left| \frac{w^n}{n^3} \right| \leq \sum \frac{1}{n^3} \text{ conv}$
 Als $|w| > 1$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w^n}{n^3} \right| = \infty$

Dus $\sum \frac{w^n}{n^3} \text{ conv} \Leftrightarrow |w| \leq 1$ en

$$\sum \frac{1}{n^3} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n \text{ conv} \Leftrightarrow z \in T^{-1}[\{w : |w| \leq 1\}].$$

Bereken $T^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$ dus $T^{-1}(1) = \infty$, $T^{-1}(-1) = -\frac{1}{2}$

Dus T^{-1} beeldt de eenheids cirkel af op de lijn $x = -\frac{1}{2}$, gebruik 0 als test punt



Conclusie

$$\sum \frac{1}{n^3} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n \text{ conv}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{2}$$