

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4 en 5W;

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, en 6N.

1. Zij

$$T(z) = \frac{1 - iz}{z - i}.$$

a) Bepaal en schets het beeld onder T van de halve cirkelschijf

$$S := \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

b) Bepaal het definitiegebied van de functie $f(z) = \log(T(z))$, als $\log$ de hoofdtak van logaritme voorstelt.

c) Bereken de limiet:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x),$$

waarbij x dus reële waarden, kleiner dan -1 doorloopt.

2. Zij

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)(z - 1)}.$$

en

$$\operatorname{ann}(1, 2, \infty) = \{z \mid |z - 1| > 2\}.$$

a) Waarom heeft $f(z)$ een Laurent-ontwikkeling op $\operatorname{ann}(1, 2, \infty)$?

b) Bepaal de breuksplitsing van $f(z)$.

c) Bepaal de Laurent-ontwikkeling van $f(z)$ op de ring $\operatorname{ann}(1, 2, \infty)$.

3. Bereken, met behulp van een kringintegraal, de oneigenlijke integraal

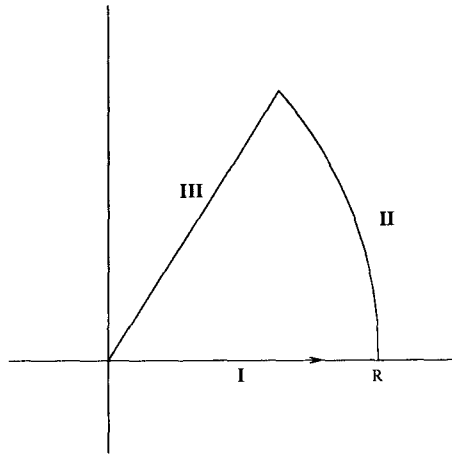
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi x \sqrt{2})}{x^4 + 1} dx.$$

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$$

en de hieronder geschetste contour γ_R , bestaande uit de drie krommen, genummerd I (het interval $[0, R]$), II (een zesde van een cirkelboog) en III (het segment $[R \exp(\pi i/3), 0]$).

Z.O.Z.



a) Toon achtereenvolgens aan:

(i) $\int_{\gamma_R} f(z) dz = -\frac{\pi i}{3} e^{\frac{\pi i}{6}}.$

(ii) $\int_{III} f(z) dz = -e^{\frac{\pi i}{3}} \int_0^R f(x) dx.$

(iii) $\int_{II} f(z) dz \rightarrow 0$ voor $R \rightarrow +\infty.$

b) Leid uit het voorgaande af dat

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}.$$

5. **alléén W.**

Bepaal het aantal nulpunten van de veelterm

$$p(z) = z^6 + 4z^2 + z + 1$$

in de ring $\text{ann}(0, 1, 2) = \{z \mid 1 < |z| < 2\}.$

6. **alléén N.**

Toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4} dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

en bereken vervolgens de waarde ervan.

	1 a:	4;	2 a:	2;	3:	10;	4 a:	7;	5:	5;	6:	5
Normering:	b:	3	b:	4			b:	3				
	c:	3	c:	4								

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{5}.$$